ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

С. П. ПУЛЬКИН

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

ПРОСВЕЩЕНИЕ • 1966

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

С. П. ПУЛЬКИН

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

Учебное пособие по курсу
«Вычислительные машины и программирование» (ч. I)
для студентов заочных отделений
физико-математических факультетов
педагогических институтов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1966

ПРЕДИСЛОВИЕ

По учебному плану заочных отделений физико-математических факультетов педагогических институтов, который начал действовать в 1963/64 учебному году, предусмотрено изучение студентами-математиками курса вычислительной математики. Этот курс изучается в два этапа. Первый этап — изучение раздела «Элементарные приближенные вычисления» в курсе «Элементарная математика» на II семестре. Второй этап — изучение курса «Вычислительные машины и программирование» на VIII, IX и X семестрах. В свою очередь, курс «Вычислительные машины и программирование» делится на две части: первая часть — «Методы вычислений», вторая часть — «Программирование».

Настоящее пособие составлено в соответствии с программой курса «Вычислительные машины и программирование». Пособие имеет целью помочь студенту-заочнику в его работе по самостоятельному изучению курса в межсессионный период и по подготовке к выполнению лабораторных работ, предусмотренных планом.

Раздел «Методы вычислений», изучаемый на VIII—X семестрах, является непосредственным продолжением раздела «Элементарные приближенные вычисления». Ввиду большого разрыва во времени изучение раздела «Методы вычислений» невозможно без повторения основных теоретических положений и восстановления практических навыков по курсу «Элементарные приближенные вычисления». Поэтому до летней сессии VIII семестра, когда будет читаться курс лекций по методам вычислений и программированию, студент должен повторить следующие наиболее необходимые темы курса приближенных вычислений:

1) *Основные правила действий над приближенными величинами.*
2) *Устройство и употребление математических таблиц.*
3) *Графические приемы решения уравнений.*
4) *Отделение корней и уточнение корня методом проб.*

Необходимо также повторить правила составления таблиц функций, восстановить практические навыки табулирования функций, в частности составление расчетных таблиц.

Наконец, восстановить навык вычислений с помощью счетной машины (типа арифмометр или ВК-1), логарифмической линейки, русских счетов. В порядке повторения следует выполнить ряд упражнений. Повторительные упражнения могут быть рекомендованы кафедрой.

В соответствии с учебным планом порядок изучения курса «Вычислительные машины и программирование» таков. На летней сессии VIII семестра читается вводный лекционный курс (28 час. лекций) по обоим разделам. На летней сессии X семестра — лабораторные работы (20 час.) и зачет по всему курсу. Так как объем лабораторных работ очень значителен (13 лабораторных работ, из них 6 по разделу «Методы вычислений» и 7 по разделу «Программирование»), то их успешное выполнение может быть осуществлено при условии проведения большой подготовительной работы самим студентом-заочником в межсессионный период. Прослушав лекционный курс летом, студент должен в течение учебного года на V курсе не только изучить теорию, но и выполнить значительную часть программы каждой лабораторной работы. Во время летней сессии V курса нужно лишь завершить выполнение лабораторных работ: 1) провести те вычисления, которые не удается провести вне стен института ввиду отсутствия счетных машин и таблиц нужного типа; 2) уточнить, под руководством преподавателя, обоснование всех операций и проверить правильность вычислений; 3) составить письменный отчет по каждой лабораторной работе с соблюдением правил записи вычислительных операций.

Рекомендуется завершить отдельные лабораторные работы и отчитаться по ним в межсессионный период на УКП, где есть для этого соответствующие условия.

В настоящем пособии подробно изложены теоретические положения, дающие обоснование численным методам решения задач. В тексте указаны примеры и упражнения. Многие упражнения носят характер контрольных вопросов. Приведенные в пособии теоретические положения, практические правила и подробно разобранные примеры дают заочнику возможность самостоятельно решать вычислительные задачи типа тех, которые будут предложены в качестве заданий для лабораторных работ. Даны описания лабораторных работ с подробным изложением порядка выполнения каждой работы.

Все замечания и пожелания просим направлять по адресу: г. Москва, пл. Революции, дом 3/1, Редакционно-издательский отдел МГЗПИ.

С. П. Пулькин

ГЛАВА 1
РЕШЕНИЕ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

§ 1. Последовательные приближения

Пусть $f(x)$ — функция действительного переменного, определенная на множестве всех действительных чисел (короче говоря, на всей числовой оси). Будем строить числовую последовательность следующим образом. Возьмем какое-нибудь число x_0, найдем значение $f(x_0)$ и обозначим через x_1. Значит, $x_1 = f(x_0)$. Найденное значение x_1 примем за значение аргумента и найдем $f(x_1)$. Обозначим $x_2 = f(x_1)$. Число x_2 примем за значение аргумента, найдем $x_3 = f(x_2)$. Этот процесс можно продолжить неограниченно. Задавая число x_0 и вычисляя один за другим $x_1, x_2, \ldots$, мы получим бесконечную числовую последовательность

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots \tag{1.1}$$

Члены этой последовательности, как видно, определяются такими соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1), \\ x_3 &= f(x_2), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_k &= f(x_{k-1}) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned} \tag{1. 2}$$

Процесс последовательного получения чисел $x_1, x_2, \ldots$ по описанному правилу называется итерацией (лат. iteratio — повторение). Последовательность (1.1), члены которой получаются в результате процесса итерации, т. е. по формулам (1.2), называется итерационной последовательностью, построенной для функции $f(x)$ с начальным членом x_0. Начальный член x_0, как сказано, выбирается произвольно.

Члены итерационной последовательности x_0, x_1, x_2, ... называются также последовательными приближениями. Именно, x_0 называется начальным приближением, x_1 — первым приближением и т. д.; вообще, x_k называется k-м приближением. Поэтому вместо термина «итерационная последовательность» применяется также термин «последовательность приближений». Причины, побудившие употреблять такой термин, вскоре будут ясны.

Мы вели речь о функции $f(x)$, определенной на всей числовой оси. При этом совершенно ясно, что, каково бы ни было начальное число x_0, существует бесконечная итерационная последовательность с начальным членом x_0. Пусть теперь функция $f(x)$ определена не на всей числовой оси, а на некотором множестве E (отрезок, интервал или какое-либо другое множество). Можно ли построить итерационную последовательность для такой функции? Прежде всего, ясно, что x_0 нужно взять из множества E. Но этого еще недостаточно для того, чтобы построить бесконечную итерационную последовательность с начальным членом x_0. Может оказаться, что в процессе последовательного вычисления членов итерационной последовательности мы получим такой член x_k, который не принадлежит E. Тогда $f(x_k)$ не существует и, следовательно, не существует x_{k+1}. Процесс построения последовательности мы должны прекратить.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что выполняются такие условия, при которых обеспечено существование бесконечной итерационной последовательности.

Итерационную последовательность можно иллюстрировать геометрически следующим образом. Построим график функции $y = f(x)$ и прямую $y = x$ (биссектриса первого координатного угла) (рис. 1).

Возьмем на оси Ox точку с абсциссой x_0, проведем через эту точку прямую, параллельную оси Oy до пересечения с кривой в точке M_0. Ордината точки M_0 будет $x_1 = f(x_0)$. Чтобы отметить точку x_1 на оси абсцисс, проведем из точки M_0 прямую, параллельную оси Ox до пересечения с прямой $y = x$ в точке N_1. Абсцисса точки N_1 и будет равна x_1. Из точки N_1 проведем прямую, параллельную оси Oy до пересечения с кривой в точке M_1, из M_1 — прямую, параллельную оси Ox до пересечения с прямой $y = x$ в точке N_2, и т. д. Этот процесс продолжаем неограниченно, следуя такому правилу: от точки прямой $y = x$ идти по прямой, параллельной оси Oy до встречи с кривой,

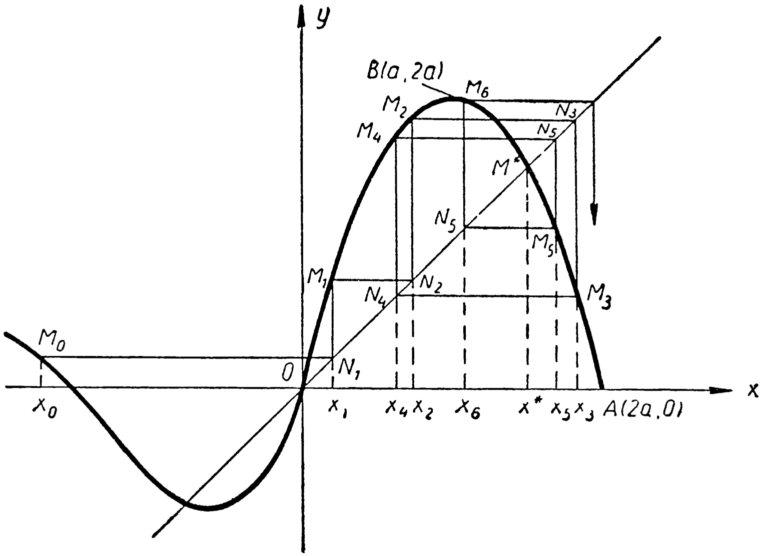

Рис. 1

от точки кривой идти по прямой, параллельной оси Ox до встречи с прямой $y = x$. Получим ломаную $M_0N_1M_1N_2M_2$ ... с бесконечным множеством звеньев. Вершины ломаной M_0, M_1, M_2, ... лежат на кривой, вершины N_1, N_2, ... — на прямой $y = x$. Абсциссы вершин ломаной будут равны членам итерационной последовательности x_0, x_1, x_2, ..., которые мы проиллюстрируем точками на оси абсцисс. Ломаная $M_0N_1M_1N_2M_2$ ... называется итерационной ломаной.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^3$.

Примем за начальный член $x_0 = \frac{1}{2}$. Вычислим следующие члены итерационной последовательности по формулам (1.2):

$$x_1 = f(x_0) = \frac{1}{2^3} = 2^{-3},$$

$$x_2 = f(x_1) = f\left(\frac{1}{2^3}\right) = 2^{-9},$$

$$x_3 = f(x_2) = f(2^{-9}) = 2^{-27}$$

и т. д.; вообще, очевидно, $x_k = 2^{-3^k}$.

Обратим внимание на то, что итерационная последовательность сходится и ее предел при $k \to \infty$ равен нулю.

Примем теперь за начальный член $x_0 = 2$. Будем иметь:

$$x_1 = f(x_0) = 2^3,$$
$$x_2 = f(x_1) = 2^9,$$
$$x_3 = f(x_2) = 2^{27}$$

и т. д.; вообще, $x_k = 2^{3^k}$.
При $k \to \infty$ итерационная последовательность является неограниченно возрастающей.

Пример 2.

$f(x) = \frac{1}{8}(12x - x^2)$.

Примем за начальное значение $x_0 = 1$ и найдем несколько членов итерационной последовательности:

$$x_1 = f(1) = \frac{11}{8} = 1{,}375,$$
$$x_2 = f\left(\frac{11}{8}\right) = \frac{935}{512} \approx 1{,}826,$$
$$x_3 = f(x_2) \approx 2{,}322,$$
$$x_4 = f(x_3) \approx 2{,}809$$

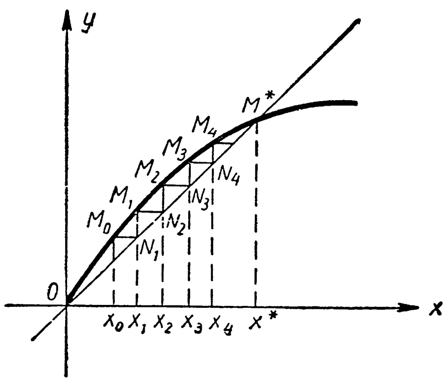

Рис. 2

и т. д., последовательность будет бесконечной (рис. 2).

Пример 3.

$f(x) = \cos x$.

Положим $x_0 = \frac{\pi}{18}$. Вычислим

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{18} = \cos 10^\circ \approx 0{,}98481.$$

Для нахождения $x_2 = \cos x_1$ заметим, что полученное численное значение x_1 нужно рассматривать как отвлеченное значение аргумента. Для вычисления $\cos x_1$ будем рассматривать x_1 как радианную меру угла. Переводя x_1 в градусную меру, найдем, пользуясь таблицами тригонометрических функций:

$$x_2 = \cos x_1 \approx 0,55302.$$

Продолжая этот процесс далее, получаем (рис. 3):

$$x_3 = \cos x_2 = 0,95094,$$
$$x_4 = \cos x_3 = 0,65927,$$
$$x_5 = \cos x_4 = 0,79044,$$
$$x_6 = \cos x_5 = 0,70353,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

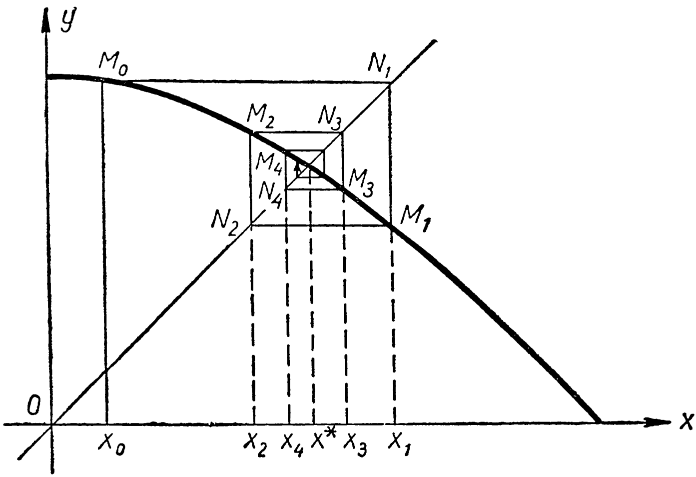

Рис. 3

Замечание. Для нахождения значений тригонометрических функций, когда аргумент рассматривается как отвлеченное число, можно пользоваться таблицами, в которых значения аргумента даются в радианной мере. Такие таблицы помещены, например, в [3], [6].

Пример 4.

$f(x) = 2\sqrt{9 - x^2}.$

Заметим, что функция определена не на всей числовой оси, а на отрезке $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Положим $x_0 = \frac{8}{3}$. Производя вычисления, получим:

$$x_1 = f(x_0) = \frac{2}{3}\sqrt{17}, \quad x_2 = f(x_1) = \frac{2}{3}\sqrt{13}, \quad x_3 = f(x_2) = \frac{2}{3}\sqrt{29}.$$

Мы видим, что $x_3 > 3$. Значит, точка x_3 уже вне области существования функции. Дальнейшее построение итерационной последовательности невозможно.

Упражнения. Дана функция $f(x)$ и начальный член итерационной последовательности x_0. Вычислить n членов итерационной последовательности точно или с точностью до m десятичных знаков. Проиллюстрировать геометрически:

1) $y = \frac{1}{2}x + 10, \quad x_0 = 0, \quad n = 10$ (точно);

2) $y = 1 + \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4 \ (m = 3)$;

3) $y = \frac{1}{x+1}, \quad x_0 = \frac{1}{2}, \quad n = 8$ (точно);

4) $y = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad n = 4 \ (m = 3)$.

Указание. При выполнении упражнения 2) рекомендуется пользоваться таблицей кубических корней.

Заметим, что итерационные последовательности могут быть сходящимися и расходящимися. Важную роль играют сходящиеся итерационные последовательности. Вопрос об условиях сходимости будет рассматриваться дальше, а пока сделаем некоторые выводы относительно рассмотренных примеров, выводы, основанные на наглядных представлениях. Из геометрических соображений ясно (рис. 2), что итерационная последовательность, рассмотренная в примере 2), является монотонно возрастающей, она сходящаяся и ее предел есть абсцисса точки пересечения кривой $y = \frac{1}{8}(12x - x^2)$ и прямой $y = x$. Рассмотрение чертежа 3 показывает, что итерационная последовательность, рассмотренная в примере 3, также сходящаяся и ее предел есть абсцисса x^* точки пересечения кривой $y = \cos x$ и прямой $y = x$. При этом итерационная последовательность колеблющаяся, ее члены поочередно то больше, то меньше x^*. Впрочем, сходимость последовательностей в примерах 2) и 3) можно очень просто доказать и аналитически.

А вот итерационная последовательность, которая геометрически проиллюстрирована на рисунке 1, является расходящейся. Это можно будет строго доказать, когда будут установлены некоторые общие свойства итерационных последовательностей.

§ 2. Общие принципы решения уравнения методом итераций

Пусть ставится задача решить уравнение

$$x = f(x), \tag{1.3}$$

где $f(x)$ — некоторая функция действительного переменного. Корнем уравнения (1.3) мы называем число x^* такое, что $x^* = f(x^*)$. Вместо термина «корень» уравнения часто употребляется термин «решение» уравнения.

Решить уравнение — это значит, прежде всего, выяснить, существуют ли корни уравнения, установить число корней и затем, если корни существуют, каким-либо способом отыскать точные значения корней или указать метод, позволяющий найти приближенное значение того или иного корня с любой степенью точности.

Один из распространенных методов решения уравнений, удобный во многих отношениях, есть метод итераций. Этот метод применяется к уравнениям, записанным именно в форме (1.3). Такую запись уравнения мы и будем все время иметь в виду. Вот примеры уравнений, записанных в форме (1.3):

$$x = 20 - x^3, \quad x = 1 + \sin 2x, \quad x = e^{-x},$$
$$x = \sqrt{x+1}, \quad x = \operatorname{tg} x, \quad x = 1 - \ln x.$$

Основная идея метода итераций состоит в следующем. Рассмотрим уравнение (1.3) и для функции $f(x)$ построим итерационную последовательность с каким-нибудь начальным членом x_0. Эта последовательность может быть сходящейся, может быть и расходящейся. Если она расходится, то ничего полезного для решения нашей задачи мы не получим. Если же итерационная последовательность сходится, а функция $f(x)$ непрерывна, то предел этой последовательности есть корень уравнения $x = f(x)$. Это утверждение мы вскоре строго докажем, а пока поясним сказанное геометрическими соображениями. Построим график функции $y = f(x)$ и прямую $y = x$. Очевидно, если график функции и прямая $y = x$ пересекаются, то абсцисса точки пересечения и есть корень уравнения (1.3). Рассматривая рисунки 2 и 3, мы убеждаемся в том, что каждое из уравнений $x = \frac{1}{8}(12x - x^2)$ и $x = \cos x$ имеет корень. При этом в том и другом случае легко убедиться, исходя из простых геометрических соображений, что итерационная последовательность сходится и именно к корню уравнения.

Теперь переходим к доказательству основных теоретических утверждений.

Теорема 1. *Если итерационная последовательность сходится к точке x^* и функция $f(x)$ непрерывна в этой точке, то x^* есть корень уравнения* (1.3).

Доказательство. Пусть дана итерационная последовательность (1.2) и она сходится, ее предел x^*, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*.$$

В силу закона построения членов последовательности имеем:

$$x_k = f(x_{k-1}). \tag{1. 4}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $k \to \infty$. Ввиду непрерывности функции $f(x)$ в точке x^* имеем:

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{k-1}) = f(x^*).$$

Но предел левой части в (1.4) равен x^*. Стало быть, переходя к пределу, получим: $x^* = f(x^*)$, т. е. x^* есть корень уравнения (1.3). Теорема доказана.

Сделаем некоторые выводы из теоремы. Пусть для функции $f(x)$ существует сходящаяся итерационная последовательность и ее предел есть точка, в которой $f(x)$ непрерывна. Тогда на основании теоремы 1 мы можем утверждать, что существует корень уравнения (1.3). Итак, мы убеждаемся (при выполнении указанных условий) в существовании корня. Но одновременно мы получаем также и способ приближенного нахождения этого корня с любой степенью точности. Действительно, ведь x^* — корень уравнения, а $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x^*$. Значит, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется N такое, что при $k > N$ будет $|x_k - x^*| < \varepsilon$. Значит, x_k при $k > N$ является приближенным значением корня с погрешностью меньшей ε. Но ε мы можем взять как угодно малым. Итак, имея возможность найти сколько угодно членов итерационной последовательности, мы можем найти значение корня с любой степенью точности. Возможно, возникнет вопрос: а как же найти точное значение корня, ведь приближенное значение не решает до конца вопрос об отыскании корня? Следует сказать, что так называемое «точное» значение корня — вообще редкое явление. Вот мы нашли корень квадратного уравнения, он равен $1+\sqrt{2}$. Мы его называем «точным» корнем. Но на самом деле это просто выражение, которое позволяет легко и быстро найти приближенное значение корня с любой степенью точности. Таким образом, мы должны считать, что вопрос об отыскании корня какого-либо уравнения решен полностью и теоретически, и практически, если, во-первых, доказано существование корня и, во-вторых, указан способ, позволяющий найти приближенное значение корня с любой степенью точности.

Теперь ясно, почему члены итерационной последовательности называются последовательными приближениями. В том случае, когда итерационная последовательность сходится, ее члены суть приближенные значения корня уравнения, причем, вычисляя последовательно один за другим члены последовательности, мы получаем все лучшие и лучшие приближения.

Метод, основанный на рассмотрении и использовании итерационной последовательности, называется методом итераций или методом последовательных приближений.

Нам важно установить достаточный признак сходимости итерационной последовательности. Таким достаточным признаком является следующее утверждение:

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ определена и дифференцируема на всей числовой оси, причем существует число q, $0<q<1$, такое, что $|f'(x)| \leqslant q$ для всех x, то уравнение* (1.3) *имеет решение и притом единственное. Это решение может быть получено методом последовательных приближений, причем за начальное приближение можно взять любое число.*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы, построим итерационную последовательность (1.2).

Рассмотрим два соседних члена последовательности: x_{k+1}, x_k. Имеем:

$$x_{k+1}=f(x_k), \quad x_k=f(x_{k-1}).$$

На основании теоремы Лагранжа о конечных приращениях

$$x_{k+1}-x_k=f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi)(x_k-x_{k-1}). \quad (1.5)$$

Так как $|f'(x)| \leqslant q$ для всех x, то $|x_{k+1} - x_k| \leqslant q\,|x_k - x_{k-1}|$. Давая k значения 1,2,..., получаем:

$$
\begin{gathered}
|x_2 - x_1| \leqslant q\,|x_1 - x_0| \\
|x_3 - x_2| \leqslant q\,|x_2 - x_1| \leqslant q^2\,|x_1 - x_0| \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|x_{k+1} - x_k| \leqslant q^k\,|x_1 - x_0| \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

Рассмотрим ряд

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_k - x_{k-1}) + \ldots \tag{1.7}$$

Сравним ряд (1.7) с рядом

$$|x_1 - x_0| + q\,|x_1 - x_0| + q^2\,|x_1 - x_0| + \ldots \tag{1.8}$$

Мы видим, что члены ряда (1.7), начиная со второго, не больше по абсолютному значению членов ряда (1.8). Но ряд (1.8) есть геометрическая прогрессия с положительными членами и со знаменателем, меньшим 1, следовательно, (1.8) есть ряд сходящийся. Ввиду неравенств (1.6) ряд (1.7) также сходящийся. Значит, его частичная сумма S_{k+1} имеет конечный предел. Но $S_{k+1} = x_k$. Итак, последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ сходится; обозначим через x^* ее предел. Заметим теперь, что $f(x)$ непрерывна всюду (так как она дифференцируема всюду), значит, она непрерывна в точке x^*. На основании теоремы 1 отсюда следует, что x^* есть корень уравнения (1.3). В то же время $x^* = \lim x_k$, т. е. решение определяется как предел итерационной последовательности. Поэтому мы и говорим, что решение может быть получено методом последовательных приближений. Докажем, что корень x^* единственный. Допустим, что существует другой корень $\bar{x} \neq x^*$. Имеем: $x^* = f(x^*)$, $\bar{x} = f(\bar{x})$. Отсюда

$$|x^* - \bar{x}| = |f(x^*) - f(\bar{x})| \leqslant q\,|x^* - \bar{x}|.$$

Деля обе части на $|x^* - \bar{x}|$, получим: $1 \leqslant q$. Но ведь $q < 1$, стало быть, мы пришли к противоречию. Теперь ясно, что x^* есть предел любой итерационной последовательности, т. е. итерационной последовательности, полученной при любом выборе начального приближения. В самом деле, каково бы ни было x_0, итерационная последовательность будет сходиться и ее предел будет решением уравнения (1.3). Но решение единственное, значит, итерационная последовательность с каким угодно начальным членом x_0 будет сходиться к этому единственному решению x^*. Теорема доказана полностью.

Итак, достаточным условием сходимости итерационного процесса является существование такого числа q, что имеет место неравенство

$$|f'(x)| \leqslant q < 1. \qquad (1.9)$$

Если функция $y = f(x)$ обладает таким свойством, то будем называть ее сжимающей функцией.

§ 3. Оценка погрешности последовательных приближений

Пусть выполняются условия теоремы 2. Рассмотрим итерационную последовательность (1.2). В силу теоремы 2 имеем: $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x^*$. Но если рассмотреть ряд (1. 7), то, как мы видели, его частичная сумма S_{k+1} равна x_k, значит, $\lim\limits_{k \to \infty} S_{k+1} = \lim x_k = x^*$, т. е. сумма ряда равна x^*. Далее,

$$x^* - x_k = x^* - S_{k+1} = (x_{k+1} - x_k) + (x_{k+2} - x_{k+1}) + \ldots . \qquad (1.\ 10)$$

Сравним ряд (1.10) с остатком ряда (1.8)

$$q^k |x_1 - x_0| + q^{k+1} |x_1 - x_0| + \ldots . \qquad (1.\ 11)$$

Сумма ряда (1.11) есть сумма геометрической прогрессии, т. е.

$$\frac{q^k}{1-q} |x_1 - x_0|,$$

но сумма ряда (1.10), в виду оценок (1.6), по абсолютной величине не больше суммы ряда (1.11). Поэтому имеем:

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{q^k}{1-q} |x_1 - x_0|. \qquad (1.\ 12)$$

Формула (1.12) и дает оценку последовательных приближений.

Заметим, что в (1.12) x_0 — начальное приближение, x_1 — первое приближение. Но любое приближение x_{k-1} можно принять за начальное, тогда x_k будет играть роль первого. Значит, в (1.12) можно x_0 заменить через x_{k-1}, x_1 — через x_k, а индекс k положить равным 1. Получим:

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_k - x_{k-1}|. \qquad (1.13)$$

§ 4. Геометрическая иллюстрация итерационной последовательности

Построим графики функций $y = x$, $y = f(x)$. Корень уравнения (1.3) есть абсцисса точки пересечения M^* этих двух графиков (рис. 1).

В § 1 мы уже рассмотрели вопрос о том, какова геометрическая иллюстрация итерационной последовательности. Мы знаем простой прием построения точек — членов итерационной последовательности — посредством построения итерационной ломаной. Если функция $f(x)$ непрерывна, а итерационная последовательность сходится, то предел итерационной последовательности есть корень x^* уравнения (1.3). Тогда последовательность вершин ломаной сходится к точке M^*.

Пусть $f(x)$ есть сжимающая функция, $|f'(x)| \leqslant q < 1$. Будем предполагать еще, что $f'(x)$ непрерывна. Изучим вид итерационной последовательности вблизи x^* и соответственно вид итерационной ломаной вблизи точки M^*. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $f'(x^*) > 0$. Так как $f'(x)$ непрерывна, то найдется окрестность $(x^* - h,\ x^* + h)$ точки x^* такая, что в ней будет также $f'(x) > 0$. Значит, $f(x)$ есть функция возрастающая в интервале $(x^* - h,\ x^* + h)$. Так как при этом $f'(x) \leqslant q < 1$, то расположение кривой вблизи точки M^* таково: левее M^* кривая выше прямой $y = x$, правее M^* — ниже этой прямой (рис. 4). Но тогда ясно, что как только некоторый член итерационной последовательности x_k попадет в окрестность $(x^* - h,\ x^* + h)$, то, начиная с этого члена, последовательность будет монотонной. При этом она уже не может выйти из окрестности, а оставаясь в ней, будет приближаться к x^*. Итерационная ломаная будет иметь вид лестницы с бесконечным множеством ступеней. Поэтому мы будем говорить, что это есть итерационная ломаная типа «лестница». Заметим, что если x_k находится в окрестности $(x^* - h, x^* + h)$ и $x_k < x^* (x_k > x^*)$, то все последующие члены последовательности будут мень-

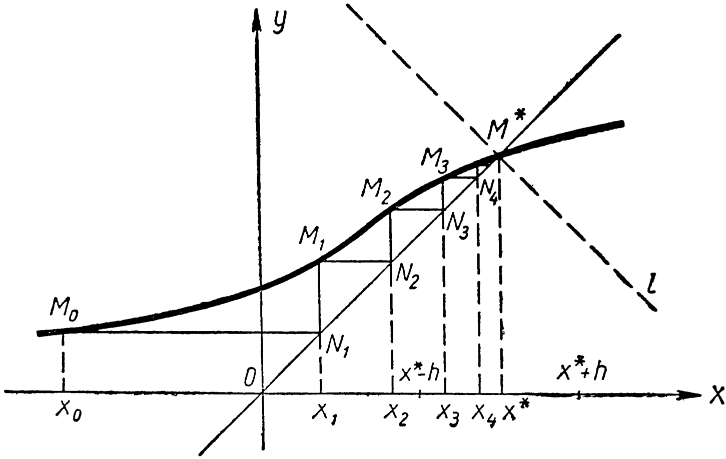

Рис. 4

ше x^* (больше x^*) и последовательность будет возрастающей (убывающей). Все это видно из рисунка 4, но сделанные выводы можно подкрепить и аналитическими рассуждениями.

Случай 2. $f'(x^*) < 0$. Найдется окрестность $(x^* - h, x^* + h)$ точки x^*, в которой также $f'(x) < 0$, т. е. функция $f(x)$ — убывающая на интервале $(x^* - h, x^* + h)$. Значит, расположение кривой вблизи точки M^* таково, как на рисунке 5. Точнее расположение кривой можно характеризовать следующим образом. Через точку M^* проведем прямую l, перпендикулярную к прямой $y = x$. Левее точки M^* кривая будет ниже прямой l, правее точки M^* — выше прямой l. В силу этой особенности расположения кривой легко убедиться в следующем. Как только некоторый член x_1 итерационной последовательности попадает в окрестность $(x^* - h, x^* + h)$, то, начиная с этого члена, итерационная ломаная будет иметь вид спирали, обвивающейся вокруг точки M^*. Поэтому мы будем говорить, что это есть итерационная ломаная типа «спираль». Условие $|f'(x)| \leqslant q < 1$ обеспечивает то, что спираль будет сжимающейся, последовательность вершин ломаной будет сходиться к точке M^*. Соответственно последовательность x_0, x_1, x_2, ... будет сходиться к x^*, но немонотонно, члены последовательности будут поочередно то меньше, то больше x^*. Если члены последовательности рассматри-

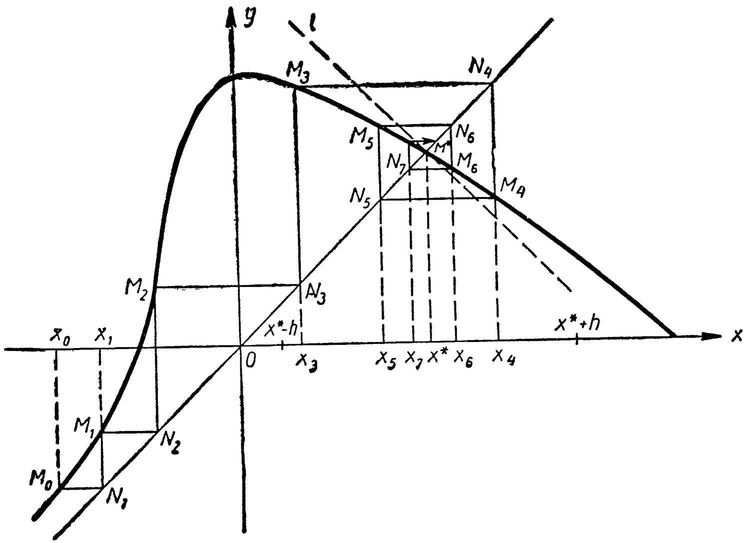

Рис. 5

вать как приближенные значения корня x^*, то можно сказать, что чередуются приближенные значения с недостатком и с избытком.

Из сказанного можно сделать следующий практически полезный вывод. Если вблизи корня уравнения $x = f(x)$ будет $f'(x) < 0$, то корень x^* заключается между двумя любыми соседними приближениями (начиная с некоторого номера).

§ 5. Решение уравнений методом итераций, когда $f(x)$ есть сжимающая функция на всей числовой оси

Рассмотрим теперь, как практически найти решение методом последовательных приближений. Пусть дано уравнение вида (1.3):

$$x = f(x).$$

Прежде всего нужно исследовать функцию $f(x)$. Пусть она определена и дифференцируема на всей числовой оси и пусть найдется число q, $0 \leqslant q < 1$, такое, что $|f'(x)| \leqslant q$ для любого x. Тогда на основании теоремы 2 можно утверждать, что уравнение (1.3) имеет решение и притом единственное. Как же практически найти это решение? Мы можем получить его приближенное значение с любой степенью точности методом последовательных приближений. При этом мы можем за начальное приближение взять любое число x_0. Однако будет лучше, если нам удастся провести отделение корня, найти по возможности малый интервал, в котором находится корень. Это можно сделать тем или иным приемом отделения корня (графически, подбором и т. п.). Тогда мы можем x_0 взять довольно близко от корня и методом итерации мы быстрее получим значение корня с требуемой точностью.

Итак, пусть начальное приближение x_0 выбрано. Далее находим последовательно x_1, x_2, ... Для вычисления этих значений следует иметь расчетную таблицу, строение которой зависит от данной функции. Остается выяснить вопрос, на каком приближении остановиться, когда процесс можно считать законченным. Естественно продолжать вычисления до тех пор, пока в пределах заданной точности два соседних приближения не совпадут ($x_{k-1} = x_k$). Однако сам факт совпадения двух соседних приближений еще не означает, что то последнее приближение, которое мы получили, является значением корня с заданной точностью. Поэтому, доводя вычисление до совпадения двух соседних приближений, мы должны проверить, действительно ли последнее приближение x_k отличается от корня x^* на величину меньшую, чем заданное число. Такую проверку можно осуществить при помощи формул (1.12) или (1.13).

Для установления момента окончания процесса вычислений можно пользоваться также таким правилом, следующим из формулы (1.13): процесс итерации продолжать до тех пор, пока не будет выполняться неравенство:

$$|x_k - x_{k-1}| \leqslant \frac{1-q}{q}\,\delta, \qquad (1.14)$$

где δ — заданная предельная абсолютная погрешность корня

З а м е ч а н и е. Пользуясь формулой (1.12), можно, найдя только x_1, заранее установить, при каком k мы получим требуемую точность. Тем самым мы заранее можем определить, сколько приближений нужно вычислить и, стало быть, каков объем предстоящей вычислительной работы.

Остановимся еще на понятии быстроты сходимости итерационного процесса. Оценка (1.12) показывает, как быстро x_k приближается к x^*. При этом ясно, что если q — малое число, то правая часть формулы (1.12) быстро убывает при возрастании k, мы говорим, что итерационный процесс быстро сходится. Значит, достаточно небольшого числа последовательных приближений, чтобы получить довольно высокую точность. Если же q близко к 1, то правая часть (1.12) убывает медленно; требуется найти большое число последовательных приближений, чтобы получить требуемую точность. Мы говорим в этом случае, что итерационный процесс сходится медленно,

Например, пусть $|x_1 - x_0| = 0{,}8$.

Если $q = \frac{1}{10}$, то из (1.12) получаем:

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{1}{10^k} \cdot \frac{10}{9} \cdot 0{,}8 < \frac{1}{10^k};$$

при $k = 5$ мы получаем приближенное значение искомого корня с погрешностью, меньшей чем 0,00001.

Если же $q = \frac{2}{3}$, то

$$|x_k - x^*| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot 2{,}4.$$

Для достижения той же точности потребуем, чтобы

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot 2{,}4 < 10^{-5}.$$

Найдем из этого неравенства

$$k \lg \frac{2}{3} + \lg 2{,}4 < -5.$$

Отсюда $k > 30$.

Итак, нужно построить не меньше 31 последовательного приближения, чтобы получить требуемую точность.

П р и м е р 1. Найти корень уравнения

$$x = 1 + \operatorname{arctg} \frac{x}{10}$$

с точностью до четвертого десятичного знака.

Рассмотрим функцию $f(x) = 1 + \operatorname{arctg}\frac{x}{10}$. Она определена на всей числовой оси. Ее производная равна $f'(x) = \frac{10}{100 + x^2}$. Очевидно, данная функция дифференцируема на всей числовой оси. Исследовав функцию $\frac{10}{100 + x^2}$, убедимся в том, что $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{10}$. Значит, можно положить $q = \frac{1}{10}$.

На основании теоремы 2 можем утверждать, что уравнение имеет единственный корень и его можно найти методом последовательных приближений, а за начальное приближение можно взять любое число. Так как $q = 0{,}1$, то итерационный процесс быстро сходится и можем получить достаточно точное значение корня при небольшом объеме вычислений.

Для выполнения вычислений составляем таблицу. Промежуточные вычисления выполняем с точностью до пятого десятичного знака. Для вычисления арктангенса пользуемся таблицами [3], где значения углов даны в радианной мере. Можно также пользоваться пятизначными таблицами тригонометрических функций, в которых значения углов даны в градусной мере (например, [4]), находить сначала значение арктангенса в градусах, минутах, секундах, а затем (по таблице) переводить в радианную меру.

Таблица 1

k	x_k	$\frac{x_k}{10}$	$\operatorname{arctg}\frac{x_k}{10}$	$x_{k+1} = 1 + \operatorname{arctg}\frac{x_k}{10}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000
1	1,00000	0,10000	0,09968	1,09968
2	1,09968	0,10997	0,10952	1,10952
3	1,10952	0,11095	0,11049	1,11049
4	1,11049	0,11105	0,11060	1,11060
5	1,11060	0,11106	0,11060	1,11060
6	1,11060			

Порядок заполнения таблицы такой: в первую строку ($k = 0$) вписываем $x_0 = 0$, затем, производя вычисление, заполняем постепенно все колонки в первой строке и в последней колонке находим $x_1 = f(x_0)$. Полученное значение x_1 пишем во вторую строку колонки (2) и далее опять заполняем постепенно всю строку, идя слева направо, пока не дойдем до последней колонки, где мы получим x_2. Полученное значение x_2 вписываем в третью строку в колонку (2) и опять повторяем прежний процесс. Далее получаем x_3, x_4 и т. д. Вычисления заканчиваем, когда у двух соседних приближений будут совпадать четыре десятичных знака. Последнее приближение мы и примем за искомое значение корня. Итак, искомый корень $x^* \approx \approx 1,1106$ (округляем до четвертого знака).

Теперь необходимо еще проверить по формуле (1.12), будет ли найденное значение удовлетворять требованию точности, т. е. мы должны оценить погрешность найденного приближенного значения. Полагая в формуле (1.12) $q = 0,1$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, получим:

$$|x_5 - x^*| < \frac{1}{10^5} \cdot \frac{10}{9} < 0,00002.$$

Мы видим, что погрешность пятого приближения меньше чем 0,00002, т. е. обеспечена точность, по крайней мере, до четвертого десятичного знака.

Замечание. Мы могли бы заранее определить, сколько членов итерационной последовательности нужно вычислить, чтобы получить требуемую точность. Для данной задачи, учитывая формулу (1.12), достаточно потребовать выполнение неравенства ($q = \frac{1}{10}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$):

$$\frac{1}{10^k} \cdot \frac{10}{9} < 0,00005.$$

Решим это неравенство, для этого сначала прологарифмируем:

$$-k + \lg \frac{10}{9} < \lg 5 - 5,$$

$$k > 5 + \lg \frac{2}{9}.$$

Значит, $k \geqslant 5$.

Итак, мы заранее определили, что x_5 будет приближенным значением корня с точностью, по крайней мере, до четвертого десятичного знака.

Пример 2. Найти корень уравнения $x = \frac{1}{1+x^2}$ с точностью до второго десятичного знака.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Она определена на всей числовой оси. Ее производная равна $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Очевидно, данная функция дифференцируема на всей числовой оси. Исследовав функцию $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, убедимся в том, что

$$\max |f'(x)| = \frac{9}{8\sqrt{3}} < 1.$$

Значит, можно положить $q = \frac{9}{8\sqrt{3}}$. Так как $\frac{9}{8\sqrt{3}} < \frac{2}{3}$, то можно положить $q = \frac{2}{3}$. Стало быть, можно за начальное приближение x_0 взять любое число. Однако в нашем примере q близко к 1, следовательно, итерационный процесс сходится медленно и при неудачно выбранном начальном приближении придется выполнять очень много вычислений. Поэтому лучше сначала попытаться найти грубое приближение. Строим графики функций $y = x$ и $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

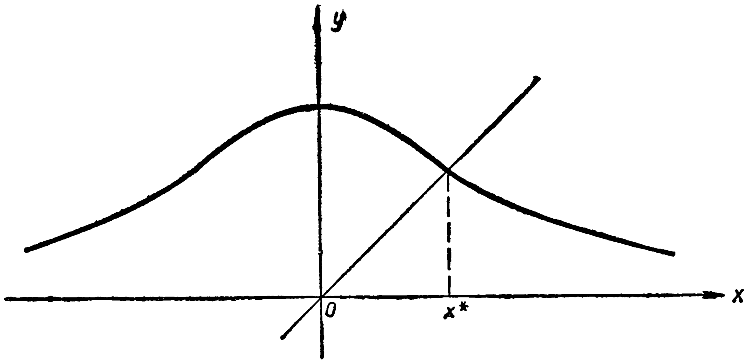

Рис. 6

(рис. 6), видим, что искомый корень x^* есть число, близкое к 0,65. Примем $x_0 = 0{,}65$ и будем строить последовательные приближения. Для этого составляем расчетную таблицу и постепенно заполняем ее. Промежуточные вычисления выполняем с точностью до третьего десятичного знака.

Таблица 2

k	x_k	x_k^2	$1 + x_k^2$	x_{k+1}
0	0,650	0,422	1,422	0,703
1	0,703	0,494	1,494	0,699
2	0,699	0,448	1,448	0,691
3	0,691	0,477	1,477	0,677
4	0,677	0,458	1,458	0,685
5	0,685	0,470	1,470	0,680
6	0,680			

Вычисления закончили, когда у двух соседних приближений (пятого и шестого) совпали два десятичных знака.

Итак, мы получили приближенное значение искомого корня $x^* \approx 0{,}68$, дойдя до шестого приближения. Проверим точность полученного результата по формуле (1.12). Полагаем в ней $k = 6$, $q = \frac{2}{3}$, $x_0 = 0{,}650$, $x_1 = 0{,}703$. Тогда

$$|x_6 - x^*| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot 3 \cdot 0{,}053 \approx 0{,}014.$$

Учитывая, что формула (1.12) дает оценку с большим «запасом», т. е. фактическая погрешность бывает значительно меньше, чем правая часть формулы, можем считать, что точность до второго десятичного знака обеспечена.

Если мы не удовлетворены таким заключением, то обратим внимание на следующее. Вблизи корня x^* имеем $f'(x) < 0$, стало быть, итерационная последовательность колеблющаяся (что подтверждается данными таблицы). Поэтому корень x^* заключен между двумя соседними приближениями. Рассмотрим два соседних приближения $x_5 = 0{,}685$ и $x_6 = 0{,}680$. Корень x^* заключен между ними, т. е. $0{,}680 < x^* < 0{,}685$. Отсюда ясно, что значение 0,68 есть приближенное значение, по крайней мере, с двумя верными десятичными знаками.

З а м е ч а н и е. Мы поставили задачу отыскания корня уравнения (1.16) с точностью до второго десятичного знака. Для того чтобы получить такое, довольно грубое приближение, нам потребовалось найти шесть последовательных приближений. Это объясняется тем, что q близко к 1 и поэтому итерационный процесс сходится медленно. Подсчитаем, сколько последовательных приближений нужно вычислить, чтобы получить приближения с погрешностью, меньшей чем 0,000005. Для того чтобы имело место неравенство $|x_k - x^*| < 0{,}000005$, достаточно потребовать, учитывая формулу (1.12),

$$\frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0| < 0{,}000005.$$

Или, в нашем случае, полагая $q = \frac{2}{3}$, $|x_1 - x_0| = 0{,}053$, видим, что достаточно выполнение неравенства:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot 0{,}159 < 0{,}000005.$$

Решим это неравенство, считая неизвестным k:

$$k \lg\frac{2}{3} + \lg 0{,}159 < -6 + \lg 5,$$

отсюда находим: $0{,}176\, k > 4{,}5024$.

Значит, целое число k должно удовлетворять неравенству $k > 25$. Итак, нужно найти, по крайней мере, 26 последовательных приближений, чтобы получить требуемую точность. Стало быть, применение метода итераций не выгодно, когда q близко к 1, а требуется большая точность.

У п р а ж н е н и я. Дано уравнение $x = 2 + \sin\frac{x}{20}$. Докажите, что это уравнение имеет единственный корень и его можно получить методом последовательных приближений. Определите, сколько последовательных приближений нужно вычислить, чтобы получить значение корня с погрешностью, меньшей чем δ ($\delta = 0{,}00005$).

2) Тот же вопрос для уравнения $x = e^{-\frac{1}{10}x^2}$ ($\delta = 0{,}001$).

§ 6. Метод итераций в случае, когда $y = f(x)$ является сжимающей функцией не на всей числовой оси

Пусть функция $f(x)$ такова, то $|f'(x)| \leqslant q < 1$ не на всей числовой оси, а на некотором отрезке $[a;\ b]$. Для того чтобы применить предшествующие рассуждения о возможности построения итерационной последовательности и о ее сходимости, мы потребуем, чтобы выполнялось условие: значения нашей функции $f(x)$ для $x \in [a;\ b]$ должно принадлежать тому же отрезку $[a;\ b]$. Вообще, если функция задана на отрезке $[a;\ b]$, то ее значения могут и не быть на этом отрезке, тогда мы не можем гарантировать, что если x_0 взять в этом отрезке, то и все остальные члены итерационной последовательности будут на том же отрезке. Значит, необходимо требовать в качестве условия, чтобы значения функции $f(x)$ для $x \in [a;\ b]$ принадлежали тому же отрезку $[a;\ b]$. Если это условие выполняется, то мы можем повторить все рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2, и получить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a;\ b]$ и все ее значения для $x \in [a;\ b]$ содержатся в том же отрезке.*

Тогда если существует число q, $0 < q < 1$, такое, что $|f'(x)| \leqslant q$ для всех $x \in [a;\ b]$, то итерационная последовательность для этой функции с любым начальным членом $x_0 \in [a;\ b]$ сходится и ее предел есть решение уравнения $x = f(x)$. Это решение единственно на отрезке $[a;\ b]$. Погрешность k-го приближения оценивается неравенством (1.12)

(Приведите сами доказательство аналогично доказательству теоремы 2.)

Геометрическая иллюстрация итерационной последовательности в окрестности точки x^* такова же, как в случае, который мы рассматривали в § 4.

Если в некоторой окрестности точки x^* $f'(x)$ сохраняет постоянный знак, то, начиная с некоторого номера, мы будем иметь один из двух типов ломаной: если $f'(x) > 0$, то будет ломаная типа «лестница», а последовательность итераций является монотонной. Если $f'(x) < 0$, то ломаная имеет вид «спирали», а последовательность итераций сходится к x^* немонотонно (рис. 4 и 5).

Пример. Рассмотрим уравнение $x = \sqrt[4]{x+10}$. Рассмотрим те значения, которые принадлежат отрезку [0,6]. Заметим, что если $0 \leqslant x \leqslant 6$, то $\sqrt[4]{10} \leqslant f(x) \leqslant 2$. (Проверить это.) Поэтому значения функции для $x \in [0; 6]$ также принадлежат отрезку [0; 6]. Найдем $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x+10)^3}}.$$

Очевидно, на отрезке [0; 6] наибольшее значение производной будет при $x = 0$. Значит,

$$0 < f'(x) \leqslant \frac{1}{4\sqrt[4]{1000}} < \frac{1}{4\sqrt[4]{625}} = \frac{1}{20}.$$

Итак, можно принять $q = \frac{1}{20} < 1$. Итерационная последовательность сходится, причем за начальное приближение x_0 можно принять любое число отрезка [0; 6]. Предел итерационной последовательности есть корень уравнения, единственный на отрезке [0; 6].

Построим последовательные приближения, приняв за начальное приближение $x_0 = 1$.

$$x_1 = f(x_0) = \sqrt[4]{11} = 1{,}82116\ \ldots,$$
$$x_2 = f(x_1) = \sqrt[4]{11{,}82116} = 1{,}85423\ \ldots,$$
$$x_3 = f(x_2) = \sqrt[4]{11{,}85423} = 1{,}85553\ \ldots,$$
$$x_4 = f(x_3) = \sqrt[4]{11{,}85553} = 1{,}85558\ \ldots$$

. . . .

. . . .

Оценка погрешности дается неравенством:

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{1}{20^k} \cdot \frac{20}{19} |x_1 - x_0|.$$

Как мы видели, $x_1 = 1{,}82\ldots$, $x_0 = 1$. Значит, $|x_1 - x_0| < 0{,}9$. Таким образом, $\frac{1}{19}|x_1 - x_0| < \frac{1}{20}$. Поэтому $|x_k - x^*| < \frac{1}{20^k}$. Мы видим, что уже при сравнительно небольшом значении k получим приближенное значение корня x_k с весьма малой погрешностью, т. е. последовательность быстро сходится. Если взять $k = 4$, то

$$|x_4 - x^*| < \frac{1}{20^4} = \frac{1}{160\,000} < 0{,}000007.$$

Мы получили приближенное значение корня, по крайней мере, с пятью верными десятичными знаками. Быстрая сходимость объясняется тем, что q весьма мало.

Замечание. Мы рассмотрели функцию $f(x)$ на отрезке $[0; 6]$. Можно было бы рассмотреть ее на бесконечном промежутке $[0; +\infty)$, условия теоремы для него выполняются. Мы убедились бы, что данное уравнение имеет единственный положительный корень.

Упражнение. Уравнение $x = 1 + \sin x$ рассмотрите на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Покажите, что для этого отрезка выполняются условия теоремы 3. Подберите q и напишите неравенства для оценки погрешности k-го приближения. Приняв $x_0 = \frac{\pi}{2}$, найдите x_1. Оцените погрешность приближенного значения корня x_3. Какое значение k нужно взять, чтобы погрешность была меньше 0,0005? Сделайте чертеж.

§ 7. Правило утроенного отрезка

Теорема 3 дает теоретически хороший признак применимости метода итераций. Но практически ее применение связано с одним существенным неудобством: она требует проверки того, что если начальное приближение x_0 содержится в отрезке $[a; b]$, то и все члены итерационной последовательности содержатся в том же отрезке. Проверка этого условия бывает затруднительна. Поэтому мы дадим еще одну теорему, более удобную для практического применения. Заметим, что на практике часто приходится решать задачу в такой постановке. Пусть дано уравнение вида (1.3) и известно грубое приближенное значение корня, обозначим его $\bar{x}$. Мы хотим применить метод итераций для уточнения корня. Если мы имеем грубое приближение корня, то обычно мы можем указать небольшой отрезок, в котором находится корень, обозначим его $[\alpha; \beta]$. Обозначим $\beta - \alpha = h$. Рассмотрим теперь отрезок $[\alpha - h; \beta + h]$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть уравнение $x = f(x)$ имеет корень на отрезке $[\alpha; \beta]$, $\beta - \alpha = h$, причем функция $f(x)$ оп-*

ределена и дифференцируема на отрезке $[\alpha - h;\ \beta + h]$. *Тогда если* $|f'(x)| \leqslant q < 1$ *на отрезке* $[\alpha - h;\ \beta + h]$, *то итерационная последовательность, начальный член которой содержится на отрезке* $[\alpha;\ \beta]$, *сходится и ее предел есть корень уравнения* (1.3). *Справедлива также оценка* (1.12).

Доказательство этой теоремы не является обязательным. Желающие могут изучить доказательство по книге [1], стр. 140—141 (теорема 2).

§ 8. Метод итераций для монотонного участка функции

Рассмотрим еще один признак применимости итерационного процесса для решения уравнения, наиболее простой и практически почти всегда пригодный. Пусть нам известно, что на отрезке $[\alpha;\ \beta]$ существует корень уравнения $x = f(x)$, обозначим его x^*. Если $|f'(x)| < 1$ на этом отрезке и $f'(x)$ сохраняет на нем постоянный знак, то существуют простые условия того, что итерационная последовательность с начальным членом x_0, взятым на отрезке $[\alpha;\ \beta]$, сходится к корню уравнения x^*.

Рассмотрим сначала случай, когда $f'(x) > 0$ на отрезке $[\alpha;\ \beta]$. Так как $|f'(x)| < 1$, то, значит, $0 < f'(x) < 1$. Функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[\alpha;\ \beta]$. Расположение кривой $y = f(x)$ на отрезке $[\alpha;\ \beta]$ таково, как на рисунке 7,

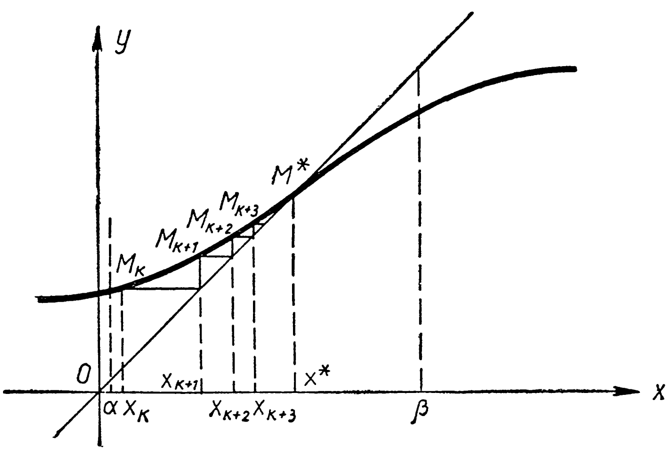

Рис. 7

именно: слева от x^* кривая выше прямой $y = x$, а справа — ниже этой прямой. Но тогда ясно, что если x_0 взять на отрезке $[\alpha; \beta]$, то итерационная последовательность будет монотонной,она не может выйти из отрезка $[\alpha; \beta]$ и будет сходиться к корню x^* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$. Заметим, что при данных условиях корень может быть только один на отрезке $[\alpha; \beta]$. Эти геометрические рассуждения можно легко перевести на язык аналитического доказательства. Итак, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть уравнение* $x = f(x)$ *имеет корень на отрезке* $[\alpha; \beta]$, *причем функция* $f(x)$ *дифференцируема в этом отрезке*, $f'(x) > 0$ и $|f'(x)| < 1$. *Каково бы ни было число* $x_0 \in [\alpha; \beta]$, *все члены итерационной последовательности будут сходиться монотонно к корню уравнения* $x \leqslant f(x)$. *Корень уравнения — единственный на отрезке* $[\alpha; \beta]$.

Пусть теперь $f'(x) < 0$ на $[\alpha; \beta]$. Так как $|f'(x)| < 1$, то $-1 < f'(x) < 0$. Функция $f(x)$ убывает на отрезке $[\alpha; \beta]$. Расположение кривой $y = f(x)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$ таково как на рисунке 8, именно: слева от x^* кривая ниже прямой l, справа от x^* кривая выше прямой l. (Прямая l перпендикулярна к прямой $y = x$ и проходит через точку M^*.) Возьмем произвольно x_0 из отрезка $[\alpha; \beta]$, найдем $x_1 = f(x_0)$. Число x_1 может оказаться вне отрезка, тогда о следующих членах итерационной последовательности мы ничего сказать не можем. Но если x_1 будет в отрезке $[\alpha; \beta]$, то обязательно x^* окажется между x_0 и x_1. В этом случае из геометрических соображений ясно, что x_2 будет между x^* и x_0, т. е. внутри отрезка $[\alpha; \beta]$. Затем x_3 будет между x_1 и x^*, т. е. опять внутри отрезка $[\alpha; \beta]$. Продолжая процесс построения членов итерационной последовательности и учитывая особенности расположения кривой, мы убеждаемся в том, что все члены итерационной последовательности будут внутри отрезка $[\alpha; \beta]$ и последовательность будет сходиться к корню x^*: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Геометрические рассуждения можно легко перевести на язык аналитического доказательства. Заметим, что и в данном случае корень может быть только один в отрезке $[\alpha; \beta]$. На чертеже 8 изображены две итерационные последовательности: одна — с начальной точкой $\overline{x_0}$, выходит за пре-

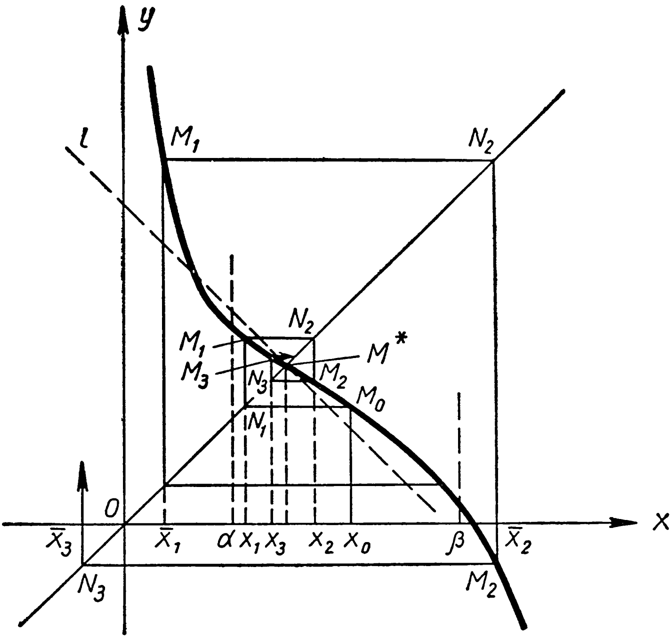

Рис. 8

делы отрезка [α; β], другая — с начальной точкой x_0, остается на отрезке и сходится к x^*. Обратим внимание на то, что в данном случае итерационная последовательность сходится к корню x^* немонотонно, члены последовательности поочередно то больше, то меньше корня. Важно отметить, что x^* заключен между двумя любыми соседними членами последовательности. Поэтому из любых двух соседних членов последовательности один является приближенным значением с недсстатком, другой — с избытком. Итак, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть уравнение $x = f(x)$ имеет корень на отрезке* [α; β], *причем, функция $f(x)$ дифференцируема в этом отрезке, $f'(x) < x$ и $|f'(x)| < 1$. Если числа* x_0 и $x_1 = f(x_0)$ *содержатся в отрезке* [α; β], *то все члены итерационной последовательности с начальным членом x_0 будут содержаться в этом отрезке, а последовательность будет сходиться к корню уравнения $x = f(x)$. Корень x^* уравнения $x = f(x)$ — единственный в отрезке* [α; β], *и* *заключен между двумя любыми соседними членами итерационной последовательности.*

Теоремы 5 и 6 определяют простое правило проверки применимости метода итераций. Будем называть это правило методом итераций на монотонном участке функции.

В тех случаях, которые мы здесь рассматривали, оценка погрешности может быть проведена, как и прежде, по формуле (1.12). Для этого нужно знать число q, такое, что $0 < q < 1$ и $|f'(x)| \leqslant q$ на отрезке $[\alpha; \beta]$. Но оценку можно провести и иначе. Особенно просто получить оценку в случае убывающей функции: так как x^* всегда заключено между соседними членами последовательности x_{k-1} и x_k, то погрешность каждого из приближенных значений x_{k-1} и x_k меньше разности $|x_k - x_{k-1}|$. Эта оценка оказывается даже более точной, чем при помощи формулы (1.12) или (1.13), как это мы видели при рассмотрении примера 2 в § 5.

Если $f(x)$ возрастающая на $[\alpha; \beta]$, то можно применить такой прием: построим «встречную» итерационную последовательность $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$, выбрав в качестве начального члена число $\bar{x}_0$, такое, что x^* заключено между x_0 и $\bar{x}_0$. Если последовательность $\{x_k\}$ будет возрастающая, то $\{\bar{x}_k\}$ — убывающая (или наоборот). Корень x^* заключен между любыми двумя числами x_k и $\bar{x}_l$. Стало быть, каждое из чисел x_k и $\bar{x}_l$ есть приближенное значение корня, причем погрешность меньше чем $|x_k - \bar{x}_l|$.

Замечание. Если $f(x)$ не есть функция сжатия на всей числовой оси, то, как мы видели, для применения метода итераций нужно предварительно отделить корень, подлежащий определению, т. е. нужно указать отрезок, в котором содержится корень, и на этом отрезке исследовать функцию $f(x)$ в соответствии с условиями одной из теорем 3, 4, 5, 6. Методы отделения корней студент изучал в курсе «элементарная математика» на первом курсе института. Напомним этот материал. Пусть уравнение имеет вид $\varphi(x) = \psi(x)$. Строим графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, соблюдая масштаб. Абсцисса точки пересечения графиков и есть корень уравнения. Из чертежа мы можем найти грубое, приближенное значение корня и можем также указать отрезок, в котором содержится корень. Затем можно аналитически доказать, что в данном отрезке содержится корень уравнения. Напомним, как это делается. Пусть функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков. Тогда внутри отрезка имеется, по крайней мере, один корень уравнения $F(x) = 0$.

Пример 1. Дано уравнение $x = 2 + \lg x$. Графическим методом устанавливаем, что уравнение имеет корень, заключенный между числами 2 и 3. Проведем аналитическое доказательство этого факта. Запишем уравнение в виде $x - 2 - \lg x = 0$. Левую часть уравнения обозначим $F(x)$. Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке [2;3],

$$F(2) = -\lg 2 < 0; \qquad F(3) = 1 - \lg 3 > 0.$$

Значит, внутри отрезка [2; 3] существует, по крайней мере, один корень данного уравнения. Исследуем на этом отрезке функцию $f(x) = 2 + \lg x$. Находим производную $f'(x) = \frac{1}{x}\lg e$. В данном отрезке производная положительна, наибольшее значение принимает при $x = 2$. Итак, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}\lg e$. Так как $\lg e \approx 0,434...$, то $|f'(x)| < 0,22$. Условия теоремы 5 выполняются. Поэтому мы можем взять любое число отрезка [2; 3] за начальное приближение x_0 и вычислять члены итерационной последовательности, которая будет сходиться к корню уравнения. Примем $x_0 = 2,4$ (это есть грубое приближение, которое мы находим, решая уравнение графически) и будем строить итерационную последовательность. Вычисления будем проводить с пятью десятичными знаками, используя семизначные таблицы логарифмов:

k	x_k	$\lg x_k$	$x_{k+1}=2+\lg x_k$
0	2,40000	0,38021	2,38021
1	2,38021	0,37622	2,37622
2	2,37622	0,37596	2,37596
3	2,37596	0,37584	2,37584
4	2,37584	0,37582	2,37582
5	2,37582	0,37581	2,37581

Так как у двух последних приближений четыре десятичных знака совпадают, то на этом заканчиваем вычисления. Проведем оценку по формуле (1.13):

$$|x_5 - x^*| \leqslant \frac{0,22}{1 - 0,22} \cdot 0,00002 < 0,00001.$$

Такая оценка обеспечивает четыре верных десятичных знака. Итак, мы получили приближенное значение корня $x^* = 2,3758$.

Пример 2. Найти положительный корень уравнения $x = \frac{1}{(x+1)^3}$ с точностью до третьего десятичного знака.

Сначала решаем уравнение графически и видим, что существует единственный положительный корень, его грубое приближение 0,4. (Выполните сами графическое решение.) Можно убедиться, что корень заключен между 0,35 и 0,40. Исследуем функцию $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$ в отрезке [0,35; 0,40].

$$f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^4}, \quad |f'(x)| = \frac{3}{(x+1)^4}.$$

Производная отрицательна, $|f'(x)|$ принимает наибольшее значение в точке $x = 0{,}35$. Итак,

$$\max|f'(x)| = \frac{3}{1{,}35^4} < \frac{3}{3{,}3} = \frac{10}{11}.$$

Мы видим, что выполняются условия теоремы 6. Стало быть, можно решать уравнение методом итераций. Но обратим внимание на то, что $q = \frac{10}{11}$, т. е. q близко к 1, и поэтому итерационный процесс сходится медленно. Полагая $x_0 = 0{,}40$, получим:

$$x_1 = \frac{1}{1{,}4^3} \approx 0{,}3644 > 0{,}35.$$

Стало быть, x_1 содержится в отрезке $[0{,}35;\ 0{,}40]$ и поэтому вся итерационная последовательность, в силу теоремы 6, будет содержаться в том же отрезке и будет сходиться к корню уравнения. Последовательность будет колеблющейся, стало быть, корень x^* будет заключен между любыми двумя соседними членами последовательности. В частности, $x_1 < x^* < x_0$. Заметим, что разность между x_0 и x_1 велика, а итерационный процесс сходится медленно. Поэтому другую начальную точку $\overline{x}_0$ берут между x_0 и x_1, например середину отрезка $[x_1;\ x_0]$, т. е. примем $\overline{x}_0 = \frac{x_0 + x_1}{2} = 0{,}3822$. Будем вычислять члены новой итерационной последовательности, пользуясь расчетной таблицей. Все промежуточные вычисления будем проводить с четырьмя десятичными знаками, пользуясь таблицей [3]:

k	$\overline{x}_k$	$1 + \overline{x}_k$	$(1 + \overline{x}_k)^3$	$x_{k+1} = \frac{1}{(1 + x_k)^3}$
0	0,3822	1,3822	2,6406	0,3787
1	0,3787	1,3787	2,6207	0,3816
2	0,3816	1,3816	2,6372	0,3792
3	0,3792	1,3792	2,6235	0,3812
4	0,3812	1,3812	2,6350	0,3795
5	0,3795	1,3795	2,6252	0,3809
6	0,3809	1,3809	2,6332	0,3798
7	0,3798	1,3798	2,6270	0,3806
8	0,3806	1,3806	2,6315	0,3800
9	0,3800	1,3800	2,6281	0,3805

Мы довели вычисления до совпадения двух десятичных знаков в соседних приближениях. Однако требуется дополнительная проверка точности полученного результата. Применим способ проверки, вытекающий из теоремы 6. Искомый корень заключен между двумя соседними приближениями x_9 и x_{10}, т. е. $0{,}3800 < x^* < 0{,}3805$. Стало быть, точность до третьего десятичного знака обеспечена

$$x^* \approx 0{,}380.$$

Заметим, что формула (1.13) оценки погрешности дает следующий результат:

$$|x_{10} - x^*| \leqslant \frac{q}{1-q} |x_9 - x_{10}|.$$

Так как $q = \frac{10}{11}$, $|x_9 - x_{10}| = 0{,}0005$, то получаем: $|x_{10} - x^*| < 0{,}005$. Такая оценка не гарантирует точность до третьего десятичного знака.

Упражнение. Доказать, что данное уравнение $x = f(x)$ имеет корень на отрезке $[a;\ b]$ и выполняются условия теоремы 5 или 6. Показать, что если принять за начальное приближение данное число (x_0 или $\bar{x}_0$), то итерационная последовательность не выйдет из отрезка $[a;\ b]$ и будет сходиться к корню уравнения. Будет ли она сходиться монотонно или немонотонно? Проиллюстрировать геометрически. Найти q, x_1 и написать формулу оценки погрешности k-го приближения.

$f(x)$	$[a;\ b]$	x_0	$\bar{x}_0$
2^{-x}	$\frac{1}{2};\ 1$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\sin\frac{3x}{2}$	$0{,}9;\ 1$	$0{,}9$	1
$\sqrt[3]{x+2}$	$1;\ 2$	1	2

§ 9. Расходящиеся итерационные последовательности

Если не выполняется условие $|f'(x)| \leqslant q\ (q < 1)$, то мы не можем утверждать заранее, что итерационная последовательность сходится. Мы не можем также утверждать, что существует корень уравнения $x = f(x)$. Отметим здесь часто встречающийся и характерный случай, когда уравнение $x = f(x)$ имеет корень x^*, но итерационная последовательность не может сходиться к этому корню. Итак, пусть уравнение $x = f(x)$ в некотором конкретном случае имеет корень x^*, т. е. $x^* = f(x^*)$ (здесь не имеется в виду, что мы знаем корень: рассуждения ведутся чисто теоретически).

и в некоторой окрестности точки x^*, обозначим ее $(x^*-h;\ x^*+h)$, имеем $|f'(x)| \geqslant q$ $(q > 1)$. Тогда при любом выборе начального приближения x_0 (если $x_0 \neq x^*$) итерационная последовательность не может сходиться к x^*. Именно, наблюдается следующая картина. Какова бы ни была итерационная последовательность, как только мы достигнем члена, содержащегося в указанной окрестности точки x^*, то как бы близко к x^* этот член ни был, последовательность начнет удаляться от точки x^* и выйдет за пределы окрестности. В этом легко убедиться, рассматривая рисунки 9, 10. Соответствующая ломаная, удаляющаяся от данной точки, будет иметь вид «лестницы» в случае $f'(x) \geqslant q > 1$ или «спирали» в случае $f'(x) \leqslant -q$ $(q > 1)$. Точка такого типа называется точкой выметания. Это явление объясняется тем, что если, например, $f'(x) \geqslant q > 1$, то вблизи точки x^* угловой коэффициент касательной больше 1, кривая слева от точки x^* лежит ниже прямой $y = x$, а справа — выше прямой. Тогда из геометрических соображений (рис. 9) ясно, что точка x^* будет точкой выметания.

Например, рассмотрим уравнение

$$x = \frac{2}{5}(5 - x^4).$$

Здесь $f(x) = \frac{2}{5}(5 - x^4)$. Нетрудно убедиться в том, что уравнение имеет корень x^*, $1{,}1 < x^* < 1{,}3$. Но если мы выберем как угодно точку x_0 и построим итерационную последовательность, она не может сходиться к x^*, так как x^* есть точка выметания (проверьте, что существует число $q > 1$, такое, что $f'(x) \leqslant -q$ в интервале $1{,}1 \leqslant x \leqslant 1{,}3$. Например, можно взять $q = 2$. Сделайте чертеж).

§ 10. Преобразование уравнения к виду, удобному для применения метода итераций

Метод итераций применяется для уравнений вида (1.3). Если же уравнение записано не в виде (1.3), то для применения к нему метода итераций необходимо преобразовать его к виду (1.3). В общем случае уравнение записывается в виде:

$$F(x) = 0. \tag{1.17}$$

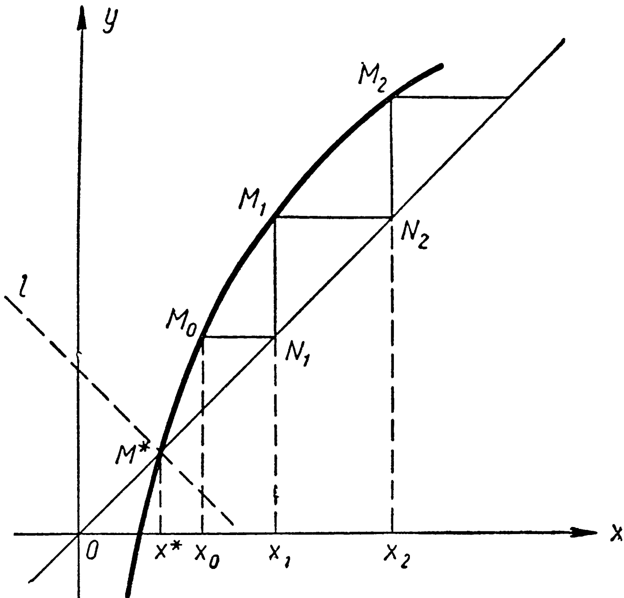

Рис. 9

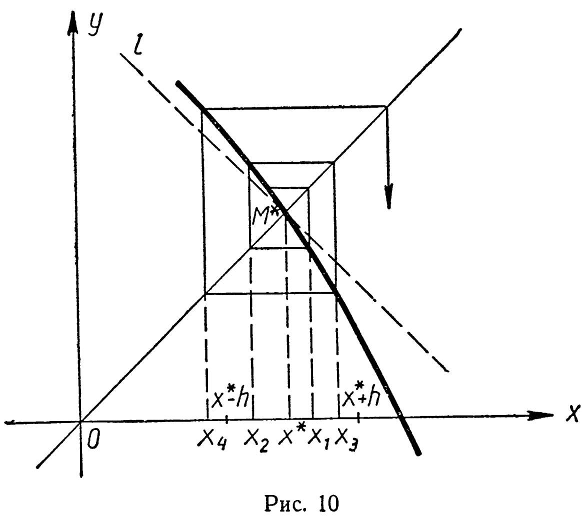

Рис. 10

Но путем тех или иных преобразований мы можем получить уравнение, эквивалентное первоначальному, причем это можно сделать многими способами. В частности, уравнение вида $F(x) = 0$ можно многими способами записать в виде $x = f(x)$.

Поясним это пока на примере. Пусть дано уравнение

$$x^3 + x - 20 = 0. \tag{1.18}$$

Перепишем его так:

$$x = 20 - x^3. \tag{1.18'}$$

Это будет уже уравнение вида (1.1), здесь $f(x) = 20 - x^3$. Запишем (1.18) в таком виде:

$$x^3 = 20 - x.$$

Отсюда получим такие новые формы записи:

$$x = \frac{20}{x^2} - \frac{1}{x}, \tag{1.18''}$$

$$x = \sqrt[3]{20 - x}. \tag{1.18'''}$$

Уравнения (1.18′), (1.18″), (1.18‴) суть уравнения вида (1.3). Можно уравнение (1.18) преобразовать к виду (1.3) многими другими способами.

Преобразовав уравнение $F(x) = 0$ к виду $x = f(x)$, мы также не всегда можем применить метод последовательных приближений, а только тогда, когда функция $f(x)$ обладает свойствами, обеспечивающими возможность применения этого метода. При этом следует заметить, что если мы уравнение $F(x) = 0$ приводим к виду $x = f(x)$ разными способами, то при одном способе может получиться уравнение вида $x = f(x)$, к которому нельзя применить метод итераций, при другом способе получается уравнение вида $x = f(x)$, к которому можно применить процесс итерации, но он не выгоден ввиду медленной сходимости, при еще одном способе можем получить уравнение, к которому применим процесс итерации, и он быстро сходится. Например, уравнение (1.18) мы преобразовали к видам (1.18′), (1.18″), (1.18‴). Из этих трех уравнений к (1.18′), (1.18″) не применим процесс итерации, а к уравнению (1.18‴) — применим, и он быстро сходится.

Теперь укажем некоторые общие приемы преобразования уравнения $F(x) = 0$ к виду $x = f(x)$.

Первый способ. Рассмотрим уравнение $F(x)=0$. Умножим обе части на число $-\lambda$ и затем прибавим к обеим частям x. Тогда получим уравнение, эквивалентное данному:

$$x = x - \lambda F(x). \tag{1.19}$$

Это есть уравнение вида (1.3), где $f(x) = x - \lambda F(x)$. Мы ищем корень данного уравнения, приближенное значение которого известно, значит, известен некоторый отрезок $[a; b]$, в котором находится корень. Число λ часто удается выбрать так, что $|f'(x)| \leqslant q < 1$ в отрезке $[a; b]$. Тогда к уравнению (1.19) применим метод итераций. Что касается выбора числа λ, то заметим, что если $m \leqslant F'(x) \leqslant M$, $m > 0$, то следует положить $\lambda = \frac{1}{M}$.

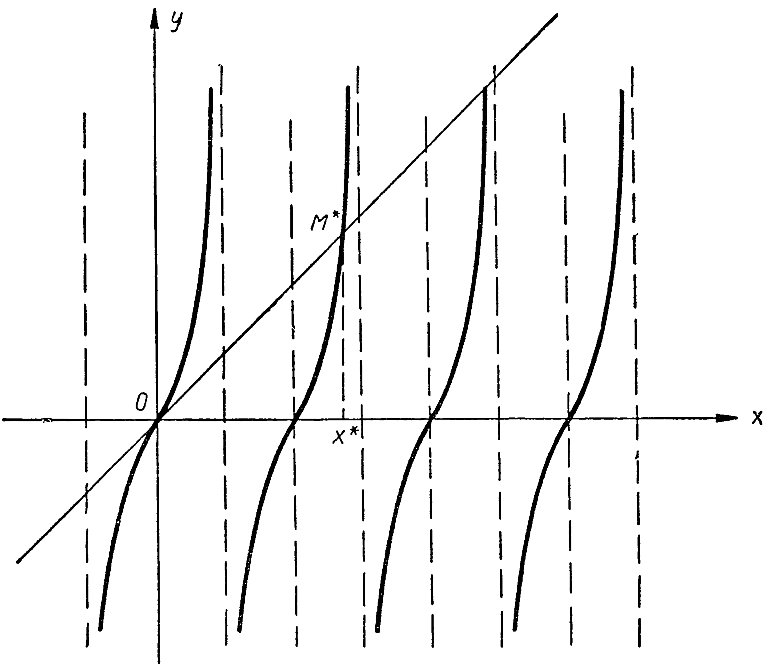

Рис. 11

Второй способ. Пусть имеем уравнение $x = f(x)$, причем в интересующем нас отрезке $|f'(x)| \geqslant q > 1$. Вместо данной функции $y = f(x)$ рассмотрим обратную функцию $x = g(y)$. Полагая здесь $x = y$, получим уравнение $x = g(x)$. Для обратной функции будет $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{q} < 1$. Стало быть, процесс итерации применим.

Например, рассмотрим уравнение $x = \operatorname{tg} x$. Как видно из графика, уравнение имеет бесконечное множество решений (рис. 11). Пусть требуется найти наименьший положительный корень x^*. Грубое приближение корня можно получить из графика. Оно будет $x^* \approx 4{,}5$. В окрестности этой точки

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \approx 22.$$

Рассмотрим вместо функции $\operatorname{tg} x$ обратную функцию (конечно, обратную по отношению к той ветви, которая соответствует интервалу $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$). Это будет функция $y = \pi + \operatorname{arctg} x$. Итак, вместо исходного уравнения получим уравнение $x=\pi+\operatorname{arctg} x$. Здесь $(\pi+\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$, вблизи точки $x=4{,}5$ эта производная будет значительно меньше 1. Итерационный процесс быстро сходится, и мы легко получаем решение с большой степенью точности.

§ 11. Практическая схема решения уравнения методом итераций

Пусть требуется решить уравнение

$$F(x) = 0 \tag{1.17}$$

методом итераций. Поступаем следующим образом.

а) Исследуем данное уравнение (1.17). Находим число корней и интервалы, в каждом из которых содержится один корень. Следует наметить, какой из корней уравнения мы в данный момент будем искать методом итераций. Установить возможно более узкий интервал, в котором находится искомый корень. Если корень находится в интервале (α, β), то α и β суть грубые приближенные значения корня с недостатком и с избытком. (Отделение корней можно провести графически.)

б) Представляем уравнение (1.17) в виде $x = f(x)$. (1.3) Это можно сделать многими способами. Из различных вариантов представления уравнения в виде (1. 3) нужно выбрать тот, при котором обеспечивается сходимость итерационной последовательности. Из различных вариантов, обеспечивающих сходимость итерационной последовательности, следует выбрать тот, при котором сходимость наибыстрейшая, т. е. $\max |f'(x)|$ возможно меньше.

в) В зависимости от вида функции $f(x)$ составляем таблицу для отыскания последовательных приближений. Расчетная таблица зависит от функции $f(x)$. В общих чертах она имеет такой вид.

Таблица 3

	x_k					$x_{k+1} = f(x_k)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)		
0	x_0					x_1
1	x_1					x_2
2	x_2					x_3
3	x_3					x_4
4	x_4					x_5
5	x_5					x_6

В столбцах 3, 4 и т. д. записываются результаты промежуточных вычислений, как обычно при табулировании функций.

г) Выбираем начальное приближение x_0 и выполняем вычисления по расчетной таблице до тех пор, пока в пределах данной точности два соседних приближения не совпадут. Последнее приближение x_{k_0} примем за искомое значение корня.

д) Оцениваем погрешность приближения x_{k_0} по формуле (1. 12) или (1. 13). Если x_{k_0} не удовлетворяет требованию точности, то продолжить вычисления, увеличив число запасных десятичных знаков.

Замечание. После того как будет вычислено $x_1 = f(x_0)$, можно определить заранее число последовательных приближений, которые предстоит вычислить. Это число можно найти, решая неравенство: $\frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0| < \delta$, где δ — заданная предельная абсолютная погрешность.

§ 12. Лабораторная работа № 1.

Тема. *Решение одного трансцендентного уравнения с одним неизвестным методом итераций (4 часа).*

Задание. Найти корень данного трансцендентного уравнения методом итераций с заданной точностью (указывается или требуемое число верных десятичных знаков m, или верхний предел абсолютной погрешности δ).

Если уравнение имеет несколько корней, то в задании указывается, какой именно корень требуется найти (например, наименьший положительный корень).

Порядок выполнения работы. 1) Отделить корни уравнения

$$F(x) = 0. \qquad (1)$$

Найти отрезок $[\alpha; \beta]$, в котором содержится искомый корень x^*.

2) Каким-либо образом привести данное уравнение к виду

$$x = f(x). \qquad (2)$$

При этом из различных представлений уравнения в виде (2) выбрать такое, что $|f'(x)| \leqslant q < 1$ для всех x отрезка $[\alpha; \beta]$, где q значительно меньше 1.

3) Выбрать начальное приближение $x_0 \in [\alpha; \beta]$ и составить бланк расчетной таблицы для вычисления последовательных приближений. Схема расчетного бланка зависит от вида функции. (Общую структуру расчетного бланка см. в таблице 3.)

4) Вычислять последовательные приближения, постепенно заполняя бланк расчетной таблицы. Вычисления проводить с одним запасным знаком. Вычисления продолжать до тех пор, пока в пределах заданной точности два соседних последовательных приближения не совпадут.

5) Оценить погрешность последнего последовательного приближения по формуле

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0|$$

или по формуле

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_k - x_{k-1}|.$$

Если последнее приближение не удовлетворяет требованию точности, то продолжить вычисления, увеличив число запасных десятичных знаков. Можно также применить другие приемы оценки точности, указанные в § 7 и 8.

ГЛАВА 2

ПРИНЦИП СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В n-МЕРНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 13. Понятие n-мерного арифметического пространства

При рассмотрении многих вопросов математики приходится иметь дело с совокупностями нескольких чисел. Например, решение системы пяти уравнений с пятью неизвестными — это совокупность пяти чисел (x, y, z, u, v), совокупность значений аргументов функции трех переменных — это совокупность трех чисел (x, y, z) и т. д. Удобно рассматривать совокупность n чисел как одно целое. Совокупность n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется точкой n-мерного пространства. Множество всевозможных таких точек называется n-мерным арифметическим пространством. Точку n-мерного пространства обозначают одной буквой, например x. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами точки x. Пишут так: $x\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

С помощью понятий n-мерного пространства и точки n-мерного пространства можно короче формулировать и записывать различные предложения, связанные с функциями многих переменных.

Так, функцию n переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мы можем теперь назвать функцией точки x n-мерного пространства и писать так: $u = f(x)$, понимая при этом под x уже не одну переменную, а совокупность n переменных. Вместо того чтобы говорить «функция n переменных», мы будем говорить «функция точки n-мерного пространства».

Заметим, что мы условились обозначать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ координаты точки n-мерного пространства. Если мы говорим о функции точки (точки x), то эта точка — переменная, и ее координаты — переменные. Значит, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные величины. Численные значения этих переменных будем обозначать значками наверху, например $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Фиксированную точку, определяемую такими координатами, также будем обозначать соответствующим значком наверху. Например, $x^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, $x^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ и т. д. Стало быть, запись $u=f(x)$ будем понимать как запись функции переменной точки x, а запись $u_0 = f(x^{(0)})$ будем понимать так: u_0 есть численное значение функции $f(x)$ в данной точке $x^{(0)}$. Если $n = 3$, то мы будем иметь трехмерное арифметическое пространство. Его можно иллюстрировать геометрически, рассмотрев реальное физическое пространство, в котором установлена, например, декартова прямоугольная система координат. Каждая точка пространства будет при этом определяться тремя числами — координатами этой точки x, y, z (можно вместо x, y, z писать x_1, x_2, x_3).

Ясно также, что двумерное арифметическое пространство может быть геометрически истолковано как множество точек плоскости, на которой установлена, например, декартова система координат. Поэтому двумерное арифметическое пространство часто называют плоскостью.

Одномерное арифметическое пространство — это множество всех действительных чисел. Геометрическая иллюстрация одномерного пространства — числовая прямая.

§ 14. Расстояние между точками в n-мерном пространстве

Пусть даны две точки n-мерного пространства

$$x^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) \text{ и } x^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}).$$

Установим понятие расстояния между ними. Мы привыкли к тому, что расстояние между точками — геометрическое понятие и что расстояние выражается длиной отрезка, соединяющего данные точки. Это понятие очень полезно распространить на точки n-мерного пространства, но тогда оно уже будет не геометрическим понятием, а будет носить арифметический характер. Значение понятия «расстояние» в арифметическом смысле можно увидеть хотя бы на таком примере. Пусть мы решаем систему пяти уравнений с пятью неизвестными. Неизвестные обозначим x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Пусть точное решение будет $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = -7$; $x_4 = -1$; $x_5 = 0$.

Короче говоря, решение есть точка пятимерного пространства, обозначим ее $x^{(0)}$ (2; 3; —7; —1; 0). Пусть мы не смогли найти точное решение и получили приближенное решение $x^{(1)}(2,3; 2,9; -6,3; -0,9; 0,4)$. Нам нужно каким-то образом оценить, характеризовать числом отличие приближенного решения от точного. Таким числом и может служить расстояние между двумя точками $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$.

Расстояние между двумя точками в n-мерном пространстве можно установить многими способами. Способ установления расстояния называется метрикой пространства.

Пусть даны две точки пространства $x\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y\ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Расстояние между этими точками будем обозначать $\rho\ (x, y)$. Наиболее распространенными являются три вида метрики:

Первая метрика:

$$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|). \quad (2.1)$$

Вторая метрика:

$$\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n|. \quad (2.2)$$

Третья метрика:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \quad (2.3)$$

В случае необходимости, во избежание путаницы, расстояние в смысле указанных определений обозначают

$$\rho\ (x, y)_1,\ \rho\ (x, y)_2,\ \rho\ (x, y)_3.$$

Заметим, что третья метрика является естественным обобщением определения расстояния в реальном трехмерном пространстве. Как известно из аналитической геометрии, в реальном трехмерном пространстве, в котором установлена декартова прямоугольная система координат, расстояние между точками $A\ (x_1, x_2, x_3)$ и $B(y_1, y_2, y_3)$ определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

n-мерное пространство, в котором принята третья метрика, называется n-мерным евклидовым пространством.

Отметим еще, что в одномерном пространстве в любой из указанных трех метрик расстояние между двумя точками равно $\rho\ (x, y) = |x - y|$. Здесь x и y — точки одномерного пространства, т. е. просто действительные числа.

Пример. Найти расстояние между двумя данными точками пятимерного пространства в смысле первой, второй, третьей метрик: $x(2;\ -1;\ 5;\ 10;\ -4)$, $y(5;\ 3;\ -4;\ 10;\ 0)$.

$$\rho(x,\ y)_1 = \max\ (3;\ 4;\ 9;\ 0;\ 4) = 9;$$
$$\rho(x,\ y)_2 = 3 + 4 + 9 + 0 + 4 = 20;$$
$$\rho(x,\ y)_3 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 9^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{122} \approx 11{,}0454.$$

Упражнения. 1) Даны точки x^0 $(2;\ 3;\ -7;\ -1;\ 0)$, $x^{(1)}(3;\ 2;\ -5;\ -2;\ 1)$, $x^{(2)}(1;\ 4;\ -8;\ -3;\ 2)$. Найти расстояние $\rho(x^{(0)},\ x^{(1)})$, $\rho(x^{(0)},\ x^{(2)})$ в смысле первой, второй, третьей метрик. Какая из точек $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ ближе к точке $x^{(0)}$?

2) Тот же вопрос для точек: $x^{(0)}$ $(1;\ 2;\ -3;\ 5;\ -2)$, $x^{(1)}$ $(2;\ 2;\ 2;\ 4;\ -2)$, $x^{(2)}(4;\ -1;\ 0;\ 3;\ 1)$.

§ 15. n-мерное метрическое пространство

Расстояние между двумя точками в реальном трехмерном пространстве обладает рядом свойств, которые изучаются в элементарной геометрии. Из них можно выделить три простые свойства, которые оказываются основными в том смысле, что, опираясь на них, можно получить все другие свойства пространства, связанные с понятием расстояния. Эти три основные свойства называются аксиомами метрики. Вот эти аксиомы:

I. Аксиома тождества. *Расстояние между любыми двумя точками пространства есть число положительное или нуль, причем расстояние равно нулю тогда и только тогда, когда две точки совпадают между собой.*

Кратко это записывается так:

$$\rho\ (x,\ y) \geqslant 0,\ \ \rho\ (x,\ x) = 0,$$

из $\rho\ (x, y) = 0$ следует $x = y$. Здесь мы видим три утверждения: 1) расстояние между любыми двумя точками неотрицательно, 2) если две точки совпадают, то расстояние равно нулю, 3) если расстояние равно нулю, то две точки совпадают, т. е. расстояние может быть равно нулю только тогда, когда точки совпадают.

II. Аксиома симметрии. $\rho\ (y,\ x) = \rho\ (x,\ y)$.

III. Аксиома треугольника. *Каковы бы ни были три точки пространства x, y, z, имеет место неравенство*

$$\rho\ (x,\ y) \leqslant \rho\ (x,\ z) + \rho\ (z,\ y).$$

Хорошо известно, что эти свойства имеют место в реальном трехмерном пространстве. Но это не означает, что они обязаны иметь место в n-мерном арифметическом пространстве, каким бы способом ни было введено расстояние. Но для каждой из трех введенных выше метрик удается доказать, что они имеют место в n-мерном пространстве. Пользуясь аксиомами метрики, мы можем легко проводить многие рассуждения, доказательства, связанные с понятием расстояния, подобно тому как мы проводим соответствующие рассуждения и доказательства для действительных чисел или для точек реального трехмерного пространства.

Доказательство выполнимости аксиом метрики в n-мерном евклидовом пространстве будет проведено ниже.

Пространство, в котором установлена метрика (в нем выполняются все три аксиомы метрики), называется метрическим пространством. Если мы рассмотрим n-мерное арифметическое пространство, то, вводя в него различные метрики, будем получать различные n-мерные метрические пространства. Наиболее подробно мы рассмотрим n-мерное евклидово пространство.

§ 16. n-мерное евклидово пространство

После того как мы рассмотрели общее понятие n-мерного арифметического метрического пространства, мы приступаем к детальному изучению евклидова n-мерного пространства. Прежде всего проведем доказательство того, что в евклидовом пространстве выполняются все три аксиомы метрики.

Д о к а з а т е л ь с т в о выполнимости первой аксиомы метрики. Итак, расстояние между точками x $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и y $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определяется формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Прежде всего заключаем из данной формулы, что, каковы бы ни были две точки x и y, расстояние между ними всегда существует и есть неотрицательное число (знак радикала обозначает арифметический корень).

Теперь нужно доказать, что если две точки совпадают, то расстояние между ними равно нулю.

В самом деле, если точки x и y совпадают, то $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots$, $x_n = y_n$. Тогда из формулы видим, что расстояние равно нулю.

Докажем, наконец, главное утверждение: расстояние может быть равно нулю только тогда, когда две точки совпадают. В самом деле, пусть x и y — произвольные точки и $\rho(x, y) = 0$. Но тогда

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 = 0.$$

Здесь в левой части равенства все слагаемые неотрицательны. Но сумма неотрицательных чисел может равняться нулю лишь тогда, когда каждое из слагаемых равно нулю:

$$(x_1 - y_1)^2 = 0; \quad (x_2 - y_2)^2 = 0; \ \ldots; \ (x_n - y_n)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = y_1, \ x_2 = y_2, \ \ldots, \ x_n = y_n,$$

т. е. точки x и y совпадают.

Доказательство выполнимости второй аксиомы метрики. Нам нужно доказать, что, каковы бы ни были точки x и y, $\rho(y, x) = \rho(x, y)$. Но это очевидно, так как $\rho(y, x)$ мы получим из формулы для $\rho(x, y)$, если поменяем местами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$. При этом численное значение корня не изменится.

Доказательство выполнимости третьей аксиомы метрики. Пусть даны три точки $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $z(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Воспользуемся следующим неравенством, известным из алгебры (неравенство Коши):

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \qquad (2.4)$$

Это неравенство справедливо для любых двух систем действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Положим здесь $a_k = x_k - z_k$, $b_k = z_k - y_k$, тогда

$$a_k + b_k = x_k - y_k$$

и неравенство (2. 4) будет записано так:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2}.$$

Это и означает, что

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

§ 17. Точечные множества в n-мерном метрическом пространстве

Открытая прямоугольная область есть множество точек n-мерного пространства, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{gathered} a_1 < x_1 < b_1 \\ a_2 < x_2 < b_2 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_n < x_n < b_n, \end{gathered}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — данные числа.

Замкнутая *прямоугольная область* есть множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{gathered} a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1 \\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n \end{gathered}$$

Открытая шаровая область есть множество точек x n-мерного метрического пространства, удовлетворяющих неравенству:

$$\rho\ (x,\ x^{(0)}) < R,$$

где $x^{(0)}$ — данная фиксированная точка, называемая центром шаровой области, а R — данное положительное число, называемое радиусом шаровой области.

В n-мерном евклидовом пространстве открытую шаровую область можно определить как совокупность точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2 + \ldots + (x_n - x_n^{(0)})^2 < R^2.$$

Замкнутая шаровая область определяется неравенством:

$$\rho\ (x,\ x^{(0)}) \leqslant R.$$

Заметим, что открытая (замкнутая) прямоугольная область в одномерном пространстве есть интервал (отрезок), в двумерном—открытая (замкнутая) прямоугольная область, в трехмерном — открытый (замкнутый) параллелепипед.

(Рекомендуется проверить это и сделать соответствующие чертежи.)

Открытая (замкнутая) шаровая область в евклидовом пространстве одного, двух, трех измерений принимает следующий наглядный вид: в одномерном пространстве — интервал (отрезок), в двумерном — открытый (замкнутый) круг, в трехмерном — открытый (замкнутый) шар.

Определение. *Окрестностью точки $x^{(0)}$ в n-мерном метрическом пространстве называется любая открытая шаровая область с центром в этой точке.*

§ 18. Предел последовательности точек в n-мерном метрическом пространстве

Пусть дана последовательность точек n-мерного метрического пространства $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$. Установим понятие предела последовательности.

Определение. *Точка $x^{(0)}$ называется пределом последовательности точек $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$, если, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует натуральное число N, такое, что для любого $k > N$ справедливо неравенство $\rho(x^{(k)}, x^{(0)}) < \varepsilon$.*

Иначе говоря, точка $x^{(0)}$ называется пределом последовательности точек $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$, если какова бы ни была окрестность точки x^0, существует натуральное число N, такое, что для любого $k > N$ точка $x^{(k)}$ содержится в этой окрестности.

Записывают так:

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(0)}.$$

Определение. *Говорят, что последовательность точек $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$, стремится к бесконечности, если, каково бы ни было $R > 0$, существует натуральное число N, такое, что для любого $k > N$ справедливо неравенство*

$$\rho(x^{(k)}, x^{(0)}) > R.$$

Если последовательность точек имеет конечный предел, то она называется сходящейся.

Последовательности точек, имеющие предел, обладают свойствами, аналогичными свойствам пределов числовых последовательностей. На доказательстве этих свойств мы останавливаться не будем. Мы отметим лишь следующее важное свойство.

Критерий Коши сходимости последовательности точек n-мерного метрического пространства. Для того чтобы последовательность n-мерного метрического пространства $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(k)}$, ... была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существовал такой номер N, что для всех k, $l > N$

$$\rho(x^{(k)}, x^{(l)}) < \varepsilon.$$

Это утверждение известно из курса математического анализа как критерий сходимости числовой последовательности (т. е. для $n = 1$).

§ 19. Операторы

Пусть дано некоторое множество E точек n-мерного пространства. Пусть установлен закон, правило, в силу которого каждой точке $x \in E$ соответствует точка y того же пространства. Тогда мы говорим, что на множестве E определен оператор. Это обстоятельство мы обозначаем символом $y = Ax$. Буква A — символ оператора. Если y есть точка, соответствующая точке x, то y мы называем значением оператора в точке x. Точку y мы назовем также образом точки x.

Рассмотрим множество H образов всех точек множества E. Множество H есть множество значений оператора A. Между множествами E и H существует следующая взаимосвязь: каждой точке $x \in E$ соответствует одна и только одна точка $y \in H$, и каждой точке $y \in H$ соответствует, по крайней мере, одна точка x множества E. Мы говорим, что оператор A отображает (или преобразует) множество E на множество H. Поэтому вместо термина «оператор» часто употребляется термин «преобразование».

Понятие оператора является естественным обобщением хорошо знакомого студенту понятия функции. Рассмотрим, например, понятие функции одного переменного. Пусть дано множество E действительных чисел и каждому числу $x \in E$ соответствует действительное число y. Тогда мы говорим, что на множестве E определена функция, и обозначаем это символом $y = f(x)$. При этом как число x, так и число y есть точки одномерного пространства. Итак, функция одного переменного — это частный случай оператора при $n = 1$.

Теперь мы рассматриваем такой же процесс, но x и y суть точки n-мерного пространства (причем пока не имеет значения, является ли пространство евклидовым или нет. Не имеет пока значение даже и то, будет ли пространство метрическим).

Рассмотрим примеры операторов. Как было отмечено, функция одного действительного переменного является примером оператора в одномерном пространстве.

Рассмотрим примеры операторов в многомерных пространствах.

Пример 1.

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 3x_2 + 1, \\ y_2 &= 4x_1 + x_2 - 3. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Это есть преобразование (оператор), определенное в двумерном пространстве (на плоскости). Каждой паре чисел (x_1, x_2) соответствует пара чисел (y_1, y_2), т. е. каждой точке двумерного пространства (плоскости) соответствует точка того же двумерного пространства. Итак, равенства (2,5) задают оператор, определенный на всей плоскости.

Пример 2.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos x_2, \\ y_2 &= x_1 \sin x_2. \end{aligned} \tag{2. 6}$$

Эти два соотношения определяют преобразование (оператор) на всей плоскости (x_1, x_2). Действительно, какова бы ни была точка (x_1, x_2), по формуле (2.6) всегда можно вычислить значения y_1, y_2 и получим точку плоскости (y_1, y_2).

Пример 3.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \\ y_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2, \\ y_3 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, \\ y_4 &= x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2. \end{aligned}$$

Эти равенства определяют преобразование (оператор) в четырехмерном пространстве: какова бы ни была точка x (x_1, x_2, x_3, x_4) четырехмерного пространства, пользуясь данными соотношениями, мы получим точку y (y_1, y_2, y_3, y_4) того же пространства, например, точке x $(1;\ 0;\ 3;\ -1)$ соответствует точка y $(11;\ 9;\ -9;\ -9)$.

§ 20. Операторные уравнения в n-мерном пространстве

Пусть мы имеем оператор A в n-мерном пространстве. Поставим своей задачей найти решение уравнения

$$x = Ax. \tag{2. 7}$$

Значит, нужно найти такую точку пространства x^*, чтобы $x^* = Ax^*$. Такая точка называется неподвижной точкой оператора. Происхождение этого названия понятно: точка x^* такова, что в результате действия оператора A мы получаем ту же точку.

Уравнение типа (2. 7) мы уже рассматривали, так как уравнение $x = f(x)$ есть частный вид уравнения (2. 7). Когда мы в § 1 изучали уравнение $x = f(x)$, то решением уравнения было некоторое число. Теперь, рассматривая уравнение вида (2. 7), мы ищем решение, которое (если, конечно, оно существует) представляет собой точку n-мерного пространства. Нетрудно заметить, что уравнение (2. 7) есть по существу система уравнений с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Именно, уравнение (2. 7) есть краткая символическая запись системы вида:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 &= \varphi_2 (x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_n &= \varphi_n (x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Стало быть, отыскание неподвижной точки оператора A означает решение системы уравнений.

Рассматривая уравнение (2. 7) мы, как всегда, должны: 1) выяснить условия, при которых решение этого уравнения существует, 2) разработать методы отыскания приближенного решения с любой степенью точности.

Для уяснения смысла уравнения (2. 7) и понятия решения этого уравнения рассмотрим пример. Пусть оператор A в двумерном пространстве определен соотношениями

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 - 2x_2 + 1, \\ y_2 &= x_1 + 4x_2 - 3. \end{aligned} \tag{2. 8}$$

При помощи этих соотношений каждая точка $x(x_1, x_2)$ преобразуется в новую точку $y(y_1, y_2)$, которую называем образом первой точки. Если мы записываем уравнение (2. 7), то это значит, что мы ищем такую точку $x(x_1, x_2)$, образ которой совпадает с самой данной точкой, т. е. $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$. Значит, для этой точки будут выполняться соотношения (2. 8), если положить $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$. Получаем:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_1 - 2x_2 + 1, \\ x_2 &= x_1 + 4x_2 - 3. \end{aligned} \tag{2. 9}$$

Мы получили систему уравнений с неизвестными x_1, x_2.

Решение системы будет $x_1 = \frac{3}{8}$, $x_2 = \frac{7}{8}$. Итак, точка $\left(\frac{3}{8}; \frac{7}{8}\right)$ есть решение уравнения $x = A\,(x)$. Проверим это непосредственной подстановкой в соотношение (2. 8). Имеем:

$$y_1 = 3\cdot\frac{3}{8} - 2\,\frac{7}{8} + 1 = \frac{3}{8},$$

$$y_2 = \frac{3}{8} + 4\cdot\,\frac{7}{8} - 3 = \frac{7}{8}.$$

Мы видим, что в результате соотношений (2. 8) точка $\left(\frac{3}{8}; \frac{7}{8}\right)$ преобразовалась в ту же точку.

Упражнения. 1) Оператор A в двумерном пространстве определяется соотношениями:

$$y_1 = x_1^2 - x_2^2 + 4,\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 - 3.$$

Доказать, что точка $x(1;\,2)$ есть решение уравнения $x = Ax$.

2) Оператор A в четырехмерном пространстве определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 - 2, \\ y_2 &= x_2 + x_3 + 1, \\ y_3 &= x_3 + x_4 + 2, \\ y_4 &= x_1 + x_4 - 1. \end{aligned}$$

Доказать, что (1; 2; —1; —2) есть неподвижная точка оператора.

Теперь выясним понятие погрешности приближенного решения операторного уравнения. Пусть x^* есть решение уравнения (2. 7), а точку $\bar{x}$ мы принимаем за приближенное значение этого решения. Погрешностью приближенного решения мы будем называть расстояние между точками $\bar{x}$ и x^*, $\rho\,(\bar{x}, x^*)$. Расстояние вообще можно понимать в смысле любой метрики, но в каждом конкретном вопросе выбирается одна определенная метрика.

В рассмотренном примере решение уравнения $x = A\,(x)$ есть точка $x^*\left(\frac{3}{8}; \frac{7}{8}\right)$ в двумерном пространстве. Если мы за приближенное решение примем точку $\bar{x}\,(\frac{1}{2};\,1)$, то погрешность Δ будет такова: в смысле первой метрики $\Delta_1 = \rho\,\overline{(x}, x^*)_1 = \frac{1}{8}$, в смысле третьей метрики (в евклидовом пространстве) $\Delta_3 = \rho\,(\bar{x},\ x^*)_3 = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

§ 21. Последовательные приближения

Для доказательства существования решения уравнения (2. 7) и для отыскания приближенного решения с любой степенью точности мы будем применять метод последовательных приближений. Рассмотрим понятие последовательных приближений оператора в n-мерном пространстве.

Последовательные приближения — это точки пространства, которые получаются в результате следующего процесса. Возьмем какую-либо точку $x^{(0)}$ и назовем ее начальным приближением. Найдем значение оператора $Ax^{(0)}$ и обозначим $x^{(1)}$, т. е.

$$x^{(1)} = Ax^{(0)}.$$

Точку $x^{(1)}$ назовем первым приближением. Будем далее определять точки

$$x^{(2)} = Ax^{(1)} \quad (x^{(2)} \text{ — второе приближение}),$$
$$x^{(3)} = Ax^{(2)} \quad (x^{(3)} \text{ — третье приближение}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} \quad (x^{(k)} \text{ — } k\text{-е приближение}).$$

Получили последовательность точек

$$x^{(0)},\ x^{(1)},\ x^{(2)},\ \dots,\ x^{k},\ \dots.$$

Это и есть последовательность приближений, или итерационная последовательность.

Примерами последовательных приближений в одномерном пространстве могут служить те последовательные приближения, которые рассматривались в § 1 для функций одной переменной.

Приведем пример построения итерационной последовательности в n-мерном пространстве.
Пусть дан оператор

$$y_1 = \frac{1}{10}\left(x_1^2 + x_2^2 + 9\right), \qquad y_2 = \frac{1}{10}\left(x_1^2 - 2x_2^2 + 12\right).$$

Будем строить последовательные приближения, приняв за начальную точку $x^{(0)}$ (1; 1). Найдем последовательные приближения так: подставим $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ в правые части соотношений (2.9), полученные значения y_1 и y_2 обозначим $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, это будет точка $x^{(1)}$ — первое приближение. Подставив $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ в правую часть, получим второе приближение и т. д. Получим последовательные приближения: $x^{(0)}$ (1;1), $x^{(1)}$(1,1; 1,1); $x^{(2)}$(1,142; 1,079), $x^{(3)}$ (1,147; 1,098), $x^{(4)}$(1,152; 1,090),...

Подобно тому как мы это делали в § 1 для уравнения $x = f(x)$ в одномерном пространстве, последовательные приближения в n-мерном пространстве применяются для решения уравнения (2. 7) таким образом.

Пусть для оператора A мы имеем итерационную последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)} \ldots$. При известных условиях оказывается, что эта последовательность сходится и ее предел $x^* = \lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)}$ есть решение уравнения (2. 7). Нашей ближайшей задачей и будет выяснение условий, при которых итерационная последовательность сходится и ее предел есть решение уравнения (2. 7). Эти условия были установлены в § 1 для одномерного пространства, теперь нужно найти условия для n-мерного метрического пространства.

§ 22. Теорема о сжатых отображениях

Введем понятие оператора сжатия. Пусть A — оператор, определенный в метрическом пространстве. Рассмотрим две различные точки этого пространства x и y. Найдем образы этих точек Ax и Ay, они также суть точки этого же пространства. Сравним расстояние между точками $\rho(x,y)$ и расстоянием между образами $\rho(Ax, Ay)$. Если существует положительное число α, меньшее единицы $(0 < \alpha < 1)$, такое, что для любых двух точек x и y пространства имеет место неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha \, \rho(x, y), \qquad (2.\ 10)$$

то оператор A называется оператором сжатия (или сжимающим отображением). Число α называется коэффициентом сжатия.

Если A есть оператор сжатия, то это означает, что в результате действия оператора расстояние между образами двух точек меньше, чем расстояние между самими данными точками (точнее, расстояние между образами двух точек не больше, чем расстояние между данными точками, умноженное на некоторое постоянное число, меньшее единицы).

Для операторов сжатия справедлива теорема, которая имеет основное значение в теории и практике метода последовательных приближений.

Теорема 7 (о сжатых отображениях). *Если A — оператор сжатия в n-мерном метрическом пространстве, то существует точка x^*, такая, что $x^* = Ax^*$, и эта точка единственная. При этом итерационная последовательность, построенная для данного оператора с любым начальным членом $x^{(0)}$, сходится к x^*.*

Доказательство. Пусть A — оператор сжатия, определенный на всем n-мерном метрическом пространстве. Возьмем любую точку пространства $x^{(0)}$ и примем за начальное приближение. Построим последовательность приближений

$$x^{(0)},\ x^{(1)},\ x^{(2)} \ldots, \tag{2.11}$$

где

$$x^{(1)} = Ax^{(0)},\ x^{(2)} = Ax^{(1)}\ , \ \ldots\ ,\ x^{(k)} = Ax^{(k-1)}.$$

Покажем, что последовательность (2. 11) удовлетворяет условиям критерия Коши.

Заметим, что

$$\rho(x^{(1)},\ x^{(2)}) = \rho(Ax^{(0)},\ Ax^{(1)}) \leqslant \alpha\rho(x^{(0)},\ x^{(1)}) = \alpha\rho(x^{(0)},\ Ax^{(0)}),$$
$$\rho(x^{(2)},\ x^{(3)}) = \rho(Ax^{(1)},\ Ax^{(2)}) \leqslant \alpha\rho(x^{(1)},\ x^{(2)}) \leqslant \alpha^2\rho(x^{(0)},\ Ax^{(0)}).$$

Продолжая этот процесс далее, получим для любого k:

$$\rho(x^{(k)},\ x^{(k+1)}) \leqslant \alpha^k\rho(x^{(0)},\ Ax^{(0)}). \tag{2.12}$$

Рассмотрим произвольные два натуральных числа k и l. Пусть, например, $l > k$, положим $l = k + p$ $(p > 0)$. Тогда

$$\rho(x^{(k)},\ x^{(l)}) = \rho(x^{(k)},\ x^{(k+p)}).$$

Применяя аксиому треугольника, приняв за третью точку x^{k+1}, будем иметь:

$$\rho(x^{(k)},\ x^{(k+p)}) \leqslant \rho(x^{(k)},\ x^{(k+1)}) + \rho(x^{(k+1)},\ x^{(k+p)}).$$

Применяя ко второму слагаемому правой части опять аксиому треугольника с третьей точкой $x^{(k+2)}$, получим:

$$\rho(x^{(k)},\ x^{(k+p)}) \leqslant \rho(x^{(k)},\ x^{(k+1)}) + \rho(x^{(k+1)},\ x^{(k+2)}) + \\ + \rho(x^{(k+2)},\ x^{(k+p)}).$$

Применяя последовательно нужное число раз аксиому треугольника, получим:

$$\rho(x^{(k)},\ x^{(l)}) \leqslant \rho(x^{(k)},\ x^{(k+1)}) + \rho(x^{(k+1)},\ x^{(k+2)}) + \ldots + \\ + \rho(x^{(k+p-1)},\ x^{(k+p)}).$$

Здесь каждое слагаемое правой части есть расстояние между двумя соседними последовательными приближениями. Оценим эти слагаемые при помощи формулы (2. 12), получим:

$$\rho(x^{(k)}, x^{(l)}) \leqslant (\alpha^k + \alpha^{k+1} + \ldots + \alpha^{k+p-1})\,\rho(x^{(0)}, Ax^{(0)}),$$

т. е., применяя формулу суммы геометрической прогрессии,

$$\rho(x^{(k)}, x^{(l)}) \leqslant \frac{\alpha^k - \alpha^{k+p}}{1-\alpha}\,\rho(x^{(0)}, Ax^{(0)}), \tag{2. 3}$$

так как $0 < \alpha < 1$, то

$$\rho(x^{(k)}, x^{(l)}) \leqslant \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\,\rho(x^{(0)}, Ax^{(0)}).$$

Здесь $\rho(x^{(0)}, Ax^{(0)})$ — определенное число, α — определенное положительное число, меньшее 1. Стало быть, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при достаточно больших k и l будет $\rho(x^{(k)}, x^{(l)}) < \varepsilon$. Это и означает, что выполняется условие критерия Коши. Значит, последовательность (2. 11) сходится. Ее предел обозначим x^*.

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*.$$

Докажем, что $x^* = Ax^*$. Рассмотрим две точки пространства x^*, Ax^* и еще третью $x^{(k)}$, где k — произвольное натуральное число. В силу аксиомы треугольника будем иметь:

$$\rho(x^*, Ax^*) \leqslant \rho(x^*, x^{(k)}) + \rho(x^{(k)}, Ax^*).$$

Учитывая, что $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$, можем написать:

$$\rho(x^*, Ax^*) \leqslant \rho(x^*, x^{(k)}) + \rho(Ax^{(k-1)}, Ax^*).$$

Принимая во внимание неравенство (2. 10), получим:

$$\rho(x^*, Ax^*) \leqslant \rho(x^*, x^{(k)}) + \alpha\rho(x^{(k-1)}, x^*).$$

Так как $x^{(k)} \to x^*$, то $\rho(x^*, x^{(k)}) \to 0$, $\rho(x^{(k-1)}, x^*) \to 0$.

Стало быть, при достаточно большом k правая часть будет меньше наперед заданного положительного числа. Но левая часть есть постоянное неотрицательное число. Мы видим, что постоянное неотрицательное число меньше любого положительного числа. Это может быть лишь тогда, когда постоянное неотрицательное число равно нулю. Итак,

$$\rho(x^*, Ax^*) = 0.$$

В силу аксиомы тождества отсюда следует $x^* = Ax^*$.

Итак, доказано, что предел итерационной последовательности есть решение уравнения $x = Ax$.

Докажем теперь, что это решение единственно. Пусть существуют два различных решения x^* и y^*, т. е.

$$x^* = Ax^*, \quad y^* = Ay^*.$$

Тогда

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(Ax^*, Ay^*).$$

В силу неравенства (2. 10) $\rho(Ax^*, Ay^*) \leqslant \alpha\rho(x^*, y^*)$.

Итак

$$\rho(x^*, y^*) \leqslant \alpha\rho(x^*, y^*).$$

Так как точки x^*, y^* различны, то $\rho(x^*, y^*) > 0$. Поэтому последнее неравенство можно сократить на $\rho(x^*, y^*)$, получим: $1 \leqslant \alpha$, но $\alpha < 1$, стало быть, мы пришли к противоречию. Наше предположение о существовании более одного решения неверно. Следовательно, решение единственно. Теорема доказана полностью.

§ 23. Оценка погрешности в методе последовательных приближений

Для последовательных приближений в случае оператора сжатия имеем неравенство (2. 13). Переходя в нем к пределу при $l \to \infty$, получим (так как $x^{(l)} \to x^*$):

$$\rho(x^{(k)}, x^*) \leqslant \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\rho(x^{(0)}, Ax^{(0)}). \tag{2.14}$$

Эта формула и дает оценку погрешности, так как расстояние от $x^{(k)}$ до x^* есть погрешность приближенного значения решения $x^{(k)}$. Заметим, что все проведенные рассуждения и формулы верны при выборе любой метрики. Чаще всего практически применяется первая или третья метрика.

Так как любое приближение можно принять за начальное, то из формулы (2. 14) получаем еще такое неравенство:

$$\rho(x^{(k)}, x^*) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}). \tag{2.15}$$

Г Л А В А 3

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИИ

§ 24. Оператор в n-мерном метрическом пространстве, определяемый линейными уравнениями

Рассмотрим n-мерное метрическое пространство. Пусть заданы n соотношений:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1,\\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n,
\end{aligned} \qquad (3.\ 1)$$

где a_{ik}, b_i — данные числа. При помощи этих соотношений произвольная точка x $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства преобразуется в новую точку y $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ того же пространства. Стало быть, соотношения (3. 1) определяют собой некоторый оператор в n-мерном пространстве. Мы обозначим его буквой A и можем записать: $y = Ax$. Соотношения (3. 1) можно короче записать так:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (3.\ 2)$$

Выясним условия, при которых оператор (3. 1) есть оператор сжатия. Эти условия зависят от того, какова метрика пространства. Сначала рассмотрим этот вопрос для случая, когда в пространстве введена первая метрика.

Рассмотрим две точки пространства x $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и x' $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$. Соответствующие значения оператора обозначим y $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и y' $(y_1', y_2', \ldots, y_n')$, т. е. $y = Ay$, $y' = Ax'$.

Будем иметь в силу (3. 2)

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + b_i,$$
$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k' + b_i. \qquad (3.3)$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$. Отсюда получим:

$$y_i - y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k - x_k'), \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.4)$$

Поэтому

$$|y_i - y_i'| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \cdot |x_k - x_k'|, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3,5)$$

Заменим здесь в каждом слагаемом правой части множитель $|x_k - x_k'|$ его наибольшим значением, т. е. $\max\limits_k |x_k - x_k'|$ (это есть наибольшее из чисел $|x_1 - x_1'|$, $|x_2 - x_2'|, \ldots, |x_n - x_n'|$). Вспомнив определение первой метрики, убеждаемся в том, что

$$\max_k |x_k - x_k'| = \rho(x, x')_1.$$

Множитель $\rho(x, x')_1$ не зависит от k, поэтому его можно вынести за знак суммы. Получим:

$$|y_i - y_i'| \leqslant \rho(x, x')_1 \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим теперь сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|$. Для каждого i ($i = 1, 2, \ldots, n$) она будет иметь определенное значение. Из всех таких значений выберем наибольшее, обозначим его $\|A\|_1$, т. е.

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|. \qquad (3.6)$$

Число $[A]_1$ *называется первой нормой оператора* A. Итак, будем иметь:

$$|y_i - y_i'| \leqslant \|A\|_1 \rho(x, x')_1.$$

Полученное неравенство верно для любого i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, значит, оно верно и для того i, при котором $|y_i - y_i'|$ принимает наибольшее значение. Но наибольшее из всех значений $|y_i - y_i'|$ есть $\rho(y, y')_1$. Итак,

$$\rho(y, y')_1 \leqslant \|A\|_1 \rho(x, x')_1$$

или

$$\rho(Ax, Ax') \leqslant \|A\|_1 \cdot \rho(x, x')_1$$

Отсюда видно, что в n-мерном пространстве, в котором введена первая метрика, оператор A есть оператор сжатия, если $\|A\|_1 < 1$.

Пусть теперь в пространстве введена третья метрика (т. е. пространство евклидово).

Соотношение (3. 4) остается в силе, из него получаем:

$$\rho(y, y')_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i')^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k - x_k')\right]^2}. \tag{3.7}$$

А теперь воспользуемся известным неравенством Буняковского:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Применим это неравенство к сумме, стоящей в квадратных скобках в (3. 7), заменив a_k на a_{ik}, b_k на $x_k - x_k'$. Получим:

$$\rho(y, y')_3 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k')^2\right)}. \tag{3.8}$$

В силу определения расстояния в евклидовом пространстве имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k')^2 = r^2, \text{ где } r = \rho(x, x')_3.$$

Число r^2 можно вынести за знак суммы $\sum_{i=1}^{n}$ и затем r вынести за знак радикала.

Получим:

$$\rho(y,\ y')_3 \leqslant r \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2}. \qquad (3.\ 9)$$

Обозначим

$$\| A \|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2}. \qquad (3.10)$$

Это число называется третьей нормой оператора A.

Соотношение (3. 9) можно теперь написать так:

$$\rho(y,\ y')_3 \leqslant \| A \|_3 \cdot \rho(x,\ x')_3. \qquad (3.\ 11)$$

Отсюда видно, что в евклидовом пространстве оператор A есть оператор сжатия, если $\|A\|_3 < 1$.

Пример. Оператор A задан соотношениями:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0{,}1\, x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}2\, x_3 + 0{,}8, \\ y_2 &= 0{,}2\, x_1 - 0{,}1\, x_2 - 1{,}2, \\ y_3 &= -0{,}3x_2 + 0{,}2\, x_3 + 2{,}7. \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Найдем $\| A \|_1$ и $\| A \|_3$.

$$\| A \|_1 = \max_i \sum_{k=1}^{n} | a_{ik} | = \max \left(\sum_{k=1}^{3} | a_{1k} |,\ \sum_{k=1}^{3} | a_{2k} |,\ \sum_{k=1}^{3} | a_{3k} | \right).$$

Заметим для ясности, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|$ есть сумма модулей коэффициентов i-й строки. Из всех таких сумм, вычисленных для всех строк, нужно найти наибольшую. Имеем:

сумма модулей коэффициентов первой строки

$$0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}6,$$

сумма модулей коэффициентов второй строки

$$0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}0 = 0{,}3,$$

сумма модулей коэффициентов третьей строки

$$0{,}0 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5,$$

наибольшая из всех сумм есть 0,6.

Итак, $\|A\|_1 = 0{,}6$.

Так как $\|A\|_1 < 1$, то данный оператор есть оператор сжатия.

Теперь найдем $||A||_3$. Имеем:

$$\|A\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2}\,.$$

Значит, это есть корень квадратный из суммы квадратов всех коэффициентов.

$$\|A\|_3 = \sqrt{0{,}01 + 0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}01 + 0{,}09 + 0{,}04} =$$
$$= \sqrt{0{,}32} = \frac{2}{5}\sqrt{2} \approx 0{,}5657.$$

Мы видим, что и в евклидовом пространстве данный оператор есть оператор сжатия.

§ 25. Решение системы линейных уравнений методом итераций

Пусть нужно решить систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{array}{l} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n = B_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n = B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \ldots + A_{nn}x_n = B_n. \end{array} \qquad (3.\ 13)$$

Прежде всего эту систему нужно переписать в другом виде, удобном для применения метода итераций. Мы знаем, что для применения метода итераций в n-мерном пространстве удобная запись уравнения или системы уравнений такова:

$$x = Ax. \qquad (3.\ 14)$$

В применении к системам линейных уравнений эта краткая символическая запись равносильна такой:

$$\begin{array}{l} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n. \end{array} \qquad (3.\ 15)$$

Действительно, запись (3. 15) означает, что мы ищем точку x $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такую, что если подставить ее координаты в правые части уравнений (3. 15), то получим ту же точку $x\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Это равносильно тому, что если мы на точку x подействуем оператором A, определенным соотношениями (3. 1), то получим снова x (т. е. мы ищем «неподвижную точку» оператора A).

Будем называть систему уравнений, записанную в виде (3. 15), системой *нормального вида*. Характерной особенностью этой системы является то, что в левой части каждого уравнения стоит только один член, он содержит неизвестную величину с коэффициентом, равным единице. При этом левые части разных уравнений обязательно содержат разные неизвестные.

Всякую систему n линейных уравнений с n неизвестными мы можем написать в виде (3. 15), а (3. 15) в краткой символической записи есть уравнение вида (3. 14) (заметим, что (3. 14) мы называем одним уравнением, а не системой уравнений, так как задано соотношение для одного оператора и неизвестная точка также одна).

Но для уравнений вида (3. 14) вопрос о применении метода итераций решен в § 2. Мы только применим полученные там результаты.

Мы видели, что если A есть оператор сжатия, то уравнение вида (3. 14) имеет единственное решение и его приближенное решение может быть получено с любой степенью точности методом последовательных приближений.

В нашем случае система уравнений, приведенная к виду (3. 15), равносильна уравнению вида (3. 14), в котором A есть оператор, определенный соотношениями (3. 1). Этот оператор есть оператор сжатия, если $\|A\|_1 < 1$ в случае первой метрики, или, если $\|A\|_3 < 1$, в случае третьей метрики (в евклидовом пространстве).

При выполнении одного из этих условий можно применить метод итераций и дать оценку погрешности последовательных приближений по формуле:

$$\rho\,(x^{(k)},\ x^*) \leqslant \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\,(x^{(0)},\ Ax^{(0)}), \tag{3.16}$$

где $\alpha = \|A\|_1$ в случае первой метрики, $\alpha = \|A\|_3$ в случае третьей метрики.

Заметим, что за начальное приближение можно взять любую точку пространства. Какова бы ни была начальная точка, итерационная последовательность сходится к x^*. Итак, мы приходим к следующему выводу.

Теорема 8. *Если система линейных уравнений записана в виде* (3. 15), *причем коэффициенты* a_{ik} *в этой системе таковы, что*

$$\max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| < 1 \tag{3.17}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 < 1, \tag{3.18}$$

то система имеет решение и притом единственное.

Это решение может быть получено методом последовательных приближений, причем за начальное приближение можно принять любую точку пространства. Погрешность k-го приближения оценивается формулой (3. 16), где $\alpha = \|A\|_1$, если расстояние определяется по первой метрике, $\alpha = \|A\|_3$, если расстояние определяется по третьей метрике.

§ 26. Практическая схема решения системы линейных уравнений методом итераций

Пусть дана система (3. 13), требуется найти решение. Прежде всего нужно было бы исследовать систему. Для этого можно вычислить определитель системы. Если определитель отличен от нуля, то решение существует и единственно.

Однако на практике не следует спешить с вычислением определителя, а сначала лучше заняться преобразованием системы к виду, удобному для применения итерации. Если мы легко приведем систему к такому виду, то тем самым мы докажем существование и единственность, вычисление определителя оказывается излишним. Итак, мы начинаем с того, что преобразуем систему уравнений к «нормальному виду», т. е. к виду (3. 15). Вообще привести систему (3. 13) к виду (3.15) очень просто, но нам нужно сделать это так, чтобы полученная система типа (3.15) удовлетворяла условиям, при которых применим метод итерации. Это условия (3.17) и (3.18). Для выполнения таких условий нужно, чтобы коэффициенты a_{ik} в системе (3.15) были очень малы. Рассмотрим сначала такую систему вида (3.13), у которой диагональные коэффициенты являются «преобладающими», т. е. они существенно больше всех остальных (точнее говоря, абсолютная величина диагонального коэффициента каждого уравнения больше суммы абсолютных величин остальных коэффициентов этого уравнения). Решим первое уравнение относительно x_1, второе — относительно x_2 и т. д. Получим систему вида (3.15), причем коэффициенты a_{ik} будут малы. Проверяем выполнение условий (3.17) и (3.18). Если хотя бы одно из них выполняется, то можем применить метод итераций. При этом заметим, что если выполняются условия (3.17) или (3.18), то решение существует и единственно. Стало быть, нет необходимости вычислять определитель системы. Поясним сказанное на примере. Пусть дана система

$$60x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 30,$$
$$10x_1 - 80x_2 - 4x_3 = 20,$$
$$12x_1 + 6x_2 - 90x_3 = 45.$$

Здесь диагональные коэффициенты являются преобладающими. Разрешим первое уравнение относительно x_1, второе — относительно x_2, третье — относительно x_3. Получим систему нормального вида:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0\cdot x_1 + \frac{1}{30}x_2 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{1}{2}, \\ x_2 &= \frac{1}{8}x_1 + 0\cdot x_2 - \frac{1}{20}x_3 - \frac{1}{4}, \\ x_3 &= \frac{2}{15}x_1 + \frac{1}{15}x_2 + 0\cdot x_3 - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Проверим выполнение условия (3. 17). Сумма модулей коэффициентов первой строчки $\frac{2}{15}$, второй строчки $\frac{7}{40}$, третьей строчки $\frac{1}{5}$. Из этих трех чисел наибольшее есть $\frac{1}{5}$. Как видим, условие (3.17) выполняется. Так как $\|A\|_1 = \frac{1}{5}$, то итерационная последовательность сходится довольно быстро в смысле первой метрики. Вычисляем также третью норму $\|A\|_3 = \frac{\sqrt{741}}{120} \approx 0,227$. Как видно, и в евклидовом пространстве сходимость будет хорошая.

Если диагональные коэффициенты не являются преобладающими, то данную систему нужно преобразовать к эквивалентной системе с преобладающими диагональными коэффициентами. Достигается это заменой каждого уравнения, в котором не выполняется условие преобладания диагонального коэффициента, линейной комбинацией его с другими уравнениями.

Когда система приведена к нормальному виду и пригодна для применения метода итераций, можно приступить к построению последовательных приближений. Сначала нужно выбрать начальное приближение. Если нам известно грубое приближение решения системы, то его и нужно взять за начальное приближение. Если никаких сведений об искомом решении нет, то за начальное приближение можно взять любую точку n-мерного пространства, т. е. любой набор чисел. Обычно за начальное приближение берут совокупность свободных членов, т. е. $x^{(0)}$ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Затем приступаем к вычислению следующих последовательных приближений. Берем начальное приближение $x^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ и подставляем в правые части уравнений (3.15), получим «первое приближение» $x^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{1})$. Подставим $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ в правые части уравнений (3.15), получаем «второе приближение» $x^{(2)}$ $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ и т. д. Этот процесс продолжаем до того момента, когда будет получена требуемая точность. Пусть мы хотим получить значение неизвестных с m десятичными знаками. Процесс закончим на том приближении, в числах которого первые m цифр совпадают с цифрами соответствующих им чисел предыдущего приближения. В значениях последовательных приближений следует удерживать $m+1$ десятичных знаков, а окончательный результат округлить на один знак. Если коэффициенты и свободные члены — точные числа, то m может быть любое, а если они суть приближенные числа, написанные с p знаками, то m нельзя брать больше чем p.

Для удобства вычислений составляются расчетные таблицы. Таких таблиц нужно столько, сколько неизвестных. Для каждой неизвестной — отдельная таблица.

Приведем в качестве образца таблицы, употребляемые для решения системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Итак, пусть система такова:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1, \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2, \\ x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3. \end{aligned}$$

Вычисление x_1 производим по следующей таблице.

Таблица 4

k		a_{11}	a_{12}	a_{13}	x_1^k
1	b_1	$x_1^{(0)}$	$x_2^{(0)}$	$x_3^{(0)}$	$x_1^{(1)}$
		$a_{11}x_1^{(0)}$	$a_{12}x_2^{(0)}$	$a_{13}x_3^{(0)}$	
2	b_1	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	$x_3^{(1)}$	$x_1^{(2)}$
		$a_{11}x_1^{(1)}$	$a_{12}x_2^{(1)}$	$a_{13}x_3^{(1)}$	
3	b_1				

Для вычисления каждого из неизвестных x_2 и x_3 составляется такая же таблица, но в таблицу для x_2 нужно записать коэффициенты a_{21}, a_{22}, a_{23}, а в таблицу для x_3 — коэффициенты a_{31}, a_{32}, a_{33}.

Вначале в каждую таблицу вписываются только известные числа: b_i, a_{ik}, $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$. Затем перемножаются числа, вписанные одно над другим (a_{11} и $x_1^{(0)}$, a_{12} и $x_2^{(0)}$ и т. д.), и результаты записываются ниже, в третью строчку. Когда вся третья строка будет заполнена, находят сумму всех чисел этой строчки и результат записывают в последнюю колонку. После того как это будет проделано во всех трех таблицах, мы получим первое приближение, т. е. $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$. Далее во всех таблицах записывают $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ в четвертую строчку и затем умножают их на числа, стоящие в первой строчке. Результаты умножения записывают ниже, в пятой строчке. В каждой таблице находят сумму всех чисел, записанных в пятой строчке, получают $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$, т. е. второе приближение. Этот процесс продолжают по такой схеме далее и постепенно получают третье, четвертое и т. д. приближения, пока не достигнут приближения требуемой точности.

П р и м е р. Решить методом итерации систему

$$\begin{aligned}3{,}438\, x_1 - 4{,}067x_2 - 106{,}4x_3 &= 46{,}84,\\ 74{,}36\, x_1 + 1{,}843x_2 - 0{,}846\, x_3 &= 26{,}48,\\ 3{,}344\, x_1 - 94{,}28x_2 + 1{,}024x_3 &= 92{,}27\end{aligned}$$

с точностью до третьего десятичного знака.

Запишем уравнения системы в другом порядке, тогда диагональные коэффициенты будут преобладающими:

$$\begin{aligned}74{,}36x_1 + 1{,}843x_2 - 0{,}846x_3 &= 26{,}48,\\ 3{,}344x_1 - 94{,}28x_2 + 1{,}024x_3 &= 92{,}27,\\ 3{,}438x_1 - 4{,}067x_2 - 106{,}4x_3 &= 46{,}84.\end{aligned}$$

Разрешим первое уравнение относительно x_1, второе — относительно x_2, третье — относительно x_3, получим:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0\cdot x_1 - 0{,}0248x_2 + 0{,}0114x_3 + 0{,}3561,\\ x_2 &= 0{,}0355x_1 + 0\cdot x_2 + 0{,}0109x_3 - 0{,}9787,\\ x_3 &= 0{,}0323x_1 - 0{,}0382x_2 + 0\cdot x_3 - 0{,}4402.\end{aligned}$$

Это будет нормальная система. Проверим выполнение условия (3.17).

$$\sum_{k=1}^{3} |a_{1k}| = 0{,}0362, \quad \sum_{k=1}^{3} |a_{2k}| = 0{,}0564, \quad \sum_{k=1}^{3} |a_{3k}| = 0{,}0705.$$

Мы видим, что $\|A\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_{k=1}^{3} |a_{ik}| = 0{,}0705 < 1.$

Итак, первая норма оператора есть довольно малое число, значительно меньше единицы. Метод итераций применим, итерационный процесс довольно быстро сходится.

За начальное приближение примем совокупность свободных членов, т. е. $x^{(0)}(0{,}3561;\ -0{,}9787;\ -0{,}4402)$.

Для отыскания последовательных приближений составляем расчетные таблицы.

Таблица 5

k		0	$-0{,}0248$	0,0114	$x_1^{(k)}$
1	0,3561	0,3561	—0,9787	—0,4402	0,3754
		0	0,0243	—0,0050	
2	0,3561	0,3754	—0,9709	—0,2877	0,3769
		0	0,0241	—0,0033	
3	0,3561	0,3769	—0,9685	—0,3910	0,3756
		0	0,0240	—0,0045	

k		0	— 0,0248	— 0,0114	$x_1^{(k)}$
4	0,3561	0,3756 / 0	—0,9696 / 0,0240	—0,3910 / —0,0045	0,3756

k		0,0355	0	0,0109	$x_2^{(k)}$
1	—0,9787	0,3561 / 0,0126	—0,9787 / 0	—0,4402 / —0,0048	—0,9709
2	—0,9787	0,3754 / 0,0133	—0,9709 / 0	—0,2877 / —0,0031	—0,9685
3	—0,9787	0,3769 / 0,0134	—0,9685 / 0	—0,3910 / —0,0043	—0,9696
4	—0,9787	0,3756 / 0,0133	—0,9696 / 0	—0,3910 / —0,0043	—0,9697

k		0,0323	—0,0382	0	$x_3^{(k)}$
1	—0,4402	0,3561 / 0,1151	—0,9787 / 0,0374	—0,4402 / 0	—0,2877
2	—0,4402	0,3754 / 0,0121	—0,9709 / 0,0371	—0,2877 / 0	—0,3910
3	—0,4402	0,3769 / 0,0122	—0,9685 / 0,0370	—0,3910 / 0	—0,3910
4	—0,4402	0,3756 / 0,0121	—0,9696 / 0,0370	—0,3910 / 0	—0,3911

Мы видим, что у третьих и четвертых приближений первые три десятичные цифры совпадают. Значит, мы можем остановиться на четвертом приближении и принять его за искомое приближенное решение системы, т. е. искомое решение будет:

$$x_1 \approx 0{,}376; \quad x_2 \approx -0{,}970; \quad x_3 \approx -0{,}391.$$

Запишем в одну таблицу все найденные последовательные приближения.

Таблица

	x_1	x_2	x_3
$x^{(0)}$	0,3561	—0,9789	—0,4402
$x^{(1)}$	0,3754	—0,9709	—0,2877
$x^{(2)}$	0,3769	—0,9685	—0,3910
$x^{(3)}$	0,3756	—0,9696	—0,3910
$x^{(4)}$	0,3756	—0,9697	—0,3911

На этом решение системы следует считать законченным.

Проведем оценку погрешности полученного решения по формуле (3.16). Будем применять первую метрику. Так как $\|A\|_1 \approx \approx 0{,}0705$, то, округляя, примем $\alpha = 0{,}08$. Теперь найдем $\rho(x^{(0)}, Ax^{(0)})$, т. е. $\rho(x^{(0)},\ x^{(1)})$. Из таблицы находим, что

$$\rho\,(x^{(0)},\ x^{(1)})_1 = \max\,(0{,}0193;\ 0,\ 0080;\ 0{,}1521) = 0{,}1525.$$

Теперь применяем формулу (3.16):

$$\rho\,(x^{(4)},\ x^{*}) \leqslant \frac{(0{,}08)^4}{1-0{,}08}\cdot 0{,}16 = \frac{0{,}64\cdot 0{,}64\cdot 0{,}8}{4{,}6}\cdot 10^{-4} > \frac{0{,}4}{4{,}6}\times$$
$$\times\, 10^{-4} < 10^{-5} < 5\cdot 10^{-4}.$$

Это подтверждает, что полученное приближение является верным до третьего десятичного знака.

Упражнение. Дана система

$$\begin{aligned} 2x_1 - \quad 3x_2 + \quad x_3 - 120x_4 &= 60, \\ x_1 + \quad 2x_2 - 80x_3 + \quad 1{,}64x_4 &= 40, \\ 96x_1 - \quad x_2 + \quad 2x_3 + \quad 3x_4 &= 24, \\ 3x_1 + 150x_2 - \quad 6x_3 - \quad 2{,}5x_4 &= 30. \end{aligned}$$

Привести ее к нормальному виду, найти норму оператора и определить, будет ли итерационный процесс сходящимся. Приняв за начальное приближение $x_1=x_2=x_3=x_4=0$, оценить погрешность пятого приближения, десятого приближения, в смысле первой метрики. Как истолковать этот результат, применяя термины, понятные школьнику? В частности, как истолковать этот результат, применяя термин «число верных знаков»?

§ 27. Лабораторная работа № 2

Тема. *Решение определенной системы n уравнений с n неизвестными методом простой итерации.*

Задание. Найти решение данной системы линейных уравнений с неизвестными с заданной точностью ($n=3$ или 4).

Для краткости письма система вида (3.13) может быть задана при помощи таблицы коэффициентов и правых частей:

x_1	x_2	x_3	B_i
A_{11}	A_{12}	A_{13}	B_1
A_{21}	A_{22}	A_{23}	B_2
A_{31}	A_{32}	A_{33}	B_3

Порядок выполнения работы. 1) Если данная система не является системой с преобладающими диагональными коэффициентами, то преобразовать ее в эквивалентную систему с преобладающими диагональными коэффициентами.

2) Привести систему уравнений, полученную в п. 1, к нормальному виду, разрешив ее относительно диагональных неизвестных.

3) Убедиться в том, что полученная нормальная система удовлетворяет условиям сходимости итерационного процесса (3.17) или (3.18). Тем самым будут доказаны существование и единственность решения.

4) Заготовить бланки расчетных таблиц для всех неизвестных. Вписать в расчетные таблицы коэффициенты нормальной системы и начальное приближение (если не будет особых указаний, то за начальное приближение принять совокупность свободных членов нормальной системы).

5) Провести вычисление последовательных приближений в соответствии с порядком, указанным в § 26. Если требуется найти решение с m верными десятичными знаками, то все вычисления проводить с $m+1$ знаками. Процесс закончить на том приближении, в числах которого первые m цифр совпадают с цифрами соответствующих им чисел предыдущего приближения, проверить оценку по формуле (3.16).

6) Найденные значения подставить для проверки в исходную систему.

Примечание. Если не удается легко привести систему к нормальному виду, то следует вычислить определитель первоначальной системы. Если определитель отличен от нуля, то решение существует и единственно и тогда работу выполнять можно. Если определитель равен нулю, то выполнение работы по данному заданию следует прекратить.

ГЛАВА 4

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

§ 28. Постановка задачи интерполяции

В практике вычислений часто приходится иметь дело с функциями, заданными таблицей. Такое задание функции встречается, во-первых, в том случае, когда значения функции, представляющей собой некоторую физическую величину, получаются из опыта, а аналитическое выражение функции нам неизвестно. Например, изучается зависимость температуры некоторого тела от времени, составляется таблица значений функции (т. е. температуры) в моменты времени с интервалом 10 *мин*, допустим, от 0 до 6 *ч*. Температура есть определенная функция времени, но аналитического выражения ее мы не знаем. Полученная таблица является единственным средством отыскания значения этой функции в будущем, после опыта. Во-вторых, многие функции имеют аналитическое выражение, и мы имеем возможность вычислить значения функции для любого значения аргумента, но эти вычисления очень затруднительны. Поэтому для практического использования таких функций в вычислительной практике составлены готовые таблицы их значений, например таблицы логарифмов, тригонометрических функций, гиперболических функций, квадратных корней и многие другие. Каждая таблица содержит значения функции для конечного числа значений аргумента, принадлежащих некоторому конечному отрезку $[a; b]$. Если обозначим значения аргумента, приведенные в таблице, через x_0, x_1, ..., x_n, то соответствующие значения функции будут $f(x_0)$, $f(x_1)$,...,$f(x_n)$. Например, в четырехзначной таблице десятичных логарифмов даются значения функции для всех целых значений аргумента от 1 до 1000. В то же время в процессе вычислений необходимо бывает узнать значение функции при промежуточном значении аргумента, не содержащемся в таблице.

Итак, как бы ни была вообще задана функция, пусть нам известна только таблица ее значений, соответствующих значениям аргумента x_0, $x_1, \ldots, x_n$. Для того чтобы достаточно быстро и точно находить значение функции при любом промежуточном значении аргумента, осуществляют процесс интерполяции. Он заключается в следующем. Находят функцию $\varphi(x)$ достаточно простую, удобную для вычислений, которая в заданных точках x_0, x_1, ..., x_n принимает значения, равные $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$. В остальных точках функция $\varphi(x)$, вообще говоря, не совпадает с $f(x)$, но является приближенным выражением функции $f(x)$. Чаще всего интерполирующую функцию ищут в виде целого многочлена, т. е.

$$\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Пусть, например, при измерении температуры тела в зависимости от времени получены следующие результаты (t — время, T — температура).

t	0	10	20	30	40	50	60
$T = f(t)$	200°	537°,5	600°	487°,5	300°	137°,5	100°

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \frac{1}{60}t^3 - \frac{15}{8}t^2 + \frac{305}{6}t + 200. \qquad (4.\ 1)$$

Заметим, что при $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60$ значения функции $\varphi(t)$ совпадают с соответствующими значениями данной функции. Мы допускаем при этом, что при других значениях t данного промежутка $0 \leqslant t \leqslant 60$ значения функции $\varphi(t)$ близки к соответствующим значениям $f(t)$. Это допущение можно оправдать, исходя из следующих соображений. Попытаемся построить график функции $f(t)$. Сначала нанесем на плоскости координаты точки, изображающие значения функции при тех значениях аргумента, которые содержатся в таблице. Получим 7 точек (рис. 12). Естественно допустить, что график искомой функции мы получим, проведя через эти точки плавную кривую. Но график многочлена — это тоже плавная кривая, проходящая через те же точки. Естественно допустить, что график многочлена будет близок к графику

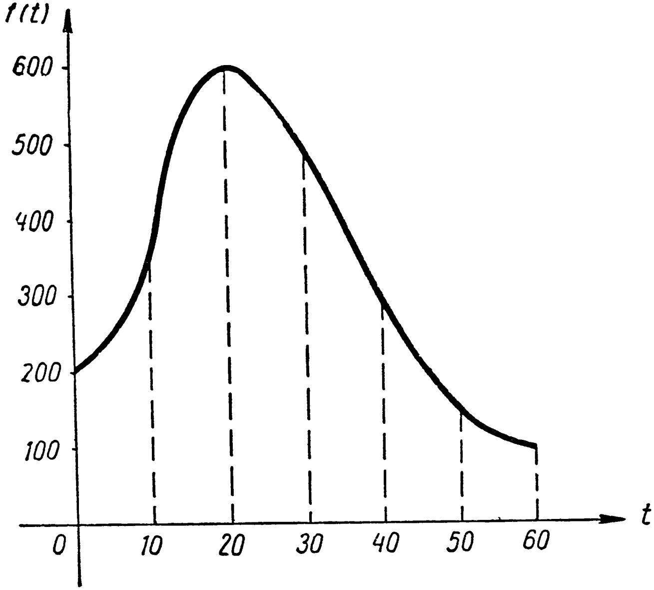

Рис. 12

функции $f(t)$, ведь различные плавные кривые, проходящие через эти 7 точек, будут мало отличаться друг от друга. Итак, функция (4.1) служит приближенным аналитическим выражением функции $f(t)$. Функция (4.1) удобна для вычислений. Пользуясь этой функцией, мы можем приближенно вычислить температуру тела в любой момент времени между 0 и 1 *ч*. Так, например, в момент времени $t = 17$ *мин*, $t = 45$ *мин* температура будет: $f(17) \approx \varphi(17) \approx 604^\circ{,}2$, $f(45) \approx \varphi(45) \approx 209^\circ{,}4$.

Точно таким же образом мы можем поступить, если дана таблица функции, для которой имеется аналитическое выражение — таблица логарифмов, тригонометрических функций и т. д. Рассмотрим таблицу десятичных логарифмов для значений аргумента 1, 2, 3, 4, 5.

x	1	2	3	4	5
$\lg x$	0,00000	0,30103	0,47712	0,60206	0,69897

Многочлен

$$\varphi(x) = -0{,}0021113x^4 + 0{,}033411x^3 - 0{,}210154x^2 + \\ + 0{,}729295x - 0{,}55043 \qquad (4.2)$$

будет интерполирующим многочленом для данной функции: его значения при $x = 1, 2, 3, 4, 5$ совпадают с данными в таблице. В остальных точках отрезка $1 \leqslant x \leqslant 5$ многочлен (4.2) служит приближенным аналитическим выражением функции $\lg x$. Пользуясь им, мы можем вычислять значения $\lg x$ при любом значении аргумента на этом отрезке. Например, подставляя в (4.2) $x = 3{,}67$, получим: $\lg 3{,}67 \approx \approx \varphi(3{,}67) \approx 0{,}5640$. Если мы получили интерполирующую функцию $\varphi(x)$, то важно оценить погрешность, которую мы допускаем, если заменяем данную функцию функцией $\varphi(x)$. В будущем будут рассмотрены различные приемы получения интерполирующих функций. При этом если данная функция задана аналитически, то оказывается возможным получить оценку погрешности интерполирующей функции. Если же значения функции могут быть получены только опытным путем, то мы, естественно, не сможем указать оценки погрешности.

Остановимся подробно на наиболее простом и часто применяемом способе интерполяции — при помощи многочлена. Заметим, что так как кривая, которая является графиком многочлена, называется параболой (соответствующего порядка), то интерполирование при помощи многочлена называется *параболическим интерполированием*.

Задачу отыскания интерполирующего многочлена в общем виде можно решить таким образом. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;\ b]$ и пусть известны значения функции в $n + 1$ точках отрезка $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти точки называются *узлами интерполяции*. Значение функции в данных точках обозначим соответственно $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, т. е. $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$. Мы ставим своей задачей найти такой многочлен, значения которого в узлах интерполяции совпадут с соответствующими значениями функции. Оказывается, наиболее естественно отыскивать многочлен n-й степени, если число узлов равно $n + 1$. Запишем многочлен n-й степени в общем виде:

$$\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n. \qquad (4.3)$$

Нам нужно найти коэффициенты этого многочлена. Мы требуем, чтобы $\varphi(x_0) = y_0$ $\varphi(x_1) = y_1, \ldots$, т. е. мы требуем выполнения следующих равенств:

$$\begin{array}{c} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_0 + a_n = y_0, \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_1 + a_n = y_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_n + a_n = y_n. \end{array} \qquad (4.4)$$

Мы получили систему $n + 1$ линейных уравнений с $n + 1$ неизвестными (неизвестными являются коэффициенты a_0, $a_1, \ldots, a_n$). Вот почему в случае $n + 1$ узлов мы ищем интерполирующий многочлен именно n-й степени. Система уравнений (4.4) всегда имеет решение. Действительно, определитель системы таков:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix} \qquad (4.5)$$

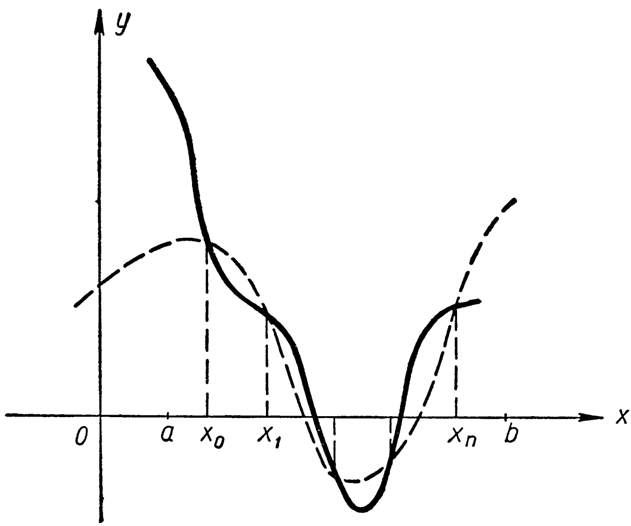

Рис. 13

В курсе алгебры доказывается, что этот определитель (определитель Вандермонда) отличен от нуля, если $x_0, x_1, \ldots, x_n$ попарно различны. Стало быть, система (4.4) имеет решение и притом единственное. Решив систему (4.4), мы получим коэффициенты, и тем самым интерполирующий многочлен будет окончательно определен.

Проведенные рассуждения помогают нам уяснить постановку задачи, убедиться в том, что интерполирующий многочлен всегда существует и что он определяется однозначно. Но для практического отыскания интерполирующего многочлена будут указаны более простые приемы.

Задача интерполирования может быть геометрически сформулирована таким образом. Изобразим графически при помощи точек значения функции при данных значениях аргумента. Требуется найти функцию данного вида (например, многочлена n-й степени), график которой проходит через эти точки (рис. 13).

Замечание. Мы искали многочлен n-й степени. Однако, когда все коэффициенты будут найдены, может случиться, что некоторые из них равны нулю, и многочлен будет фактически более низкой степени.

§ 29. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$ и известны значения функции $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Будем считать, что узлы нумерованы в порядке возрастания: $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Мы уже знаем, что существует интерполяционный многочлен не выше n-й степени и притом единственный. Рассмотрим здесь простой практический прием для нахождения этого многочлена.

Итак, нужно найти многочлен $L_n(x)$ не выше n-й степени, который в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принимает данные значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Сначала решим такую более простую задачу. Найдем многочлен $l_i(x)$, удовлетворяющий условиям $l_i(x_k) = 0$ при $k \neq i$ и $l_i(x_i) = y_i$, т. е. многочлен, который в данном i-ом узле принимает значения y_i, а в других узлах обращается в нуль.

Так как этот многочлен обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, т. е. эти точки суть корни многочлена, то он имеет вид

$$l_i(x)=C_i(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n), \tag{4.6}$$

где C_i — постоянный коэффициент. Чтобы найти C_i, подставим в (4.6) вместо x значение x_i. Учитывая, что $l_i(x) = y_i$, получим:

$$y_i=C_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n). \tag{4.7}$$

Заметим, что в правой части равенства (4.7) ни один из множителей не равен нулю. Поэтому находим из (4.7):

$$C_i = \frac{y_i}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Стало быть, подставив C_i в (4.6), получим:

$$l_i(x) = y_i\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \tag{4.8}$$

Как видно, $l_i(x)$ есть многочлен n-й степени. Таким путем мы найдем $n+1$ многочленов: $l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2 x$, ..., $l_n(x)$, каждый из них n-й степени.

Рассмотрим теперь такой многочлен:

$$L_n(x) = l_0(x)+l_1(x)+\ldots+l_n(x).$$

Так как каждое из слагаемых есть многочлен n-й степени, то сумма, т. е. $L_n(x)$, есть многочлен не выше n-й степени. Кроме того, $L_n(x_i)= y_i$. Стало быть, это и есть искомый интерполяционный многочлен. Учитывая запись $l_i(x)$ в виде (4.8), можем написать:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \tag{4.9}$$

Формула (4.9) называется интерполяционной формулой Лагранжа. Многочлен $L_n(x)$, определяемый формулой (4.9), называется интерполяционным многочленом Лагранжа.

Как мы видели в § 19, интерполяционный многочлен n-й степени при $n+1$ узлах может быть только один. Стало быть, кроме многочлена (4.9), других интерполяционных многочленов не существует. Могут быть только различные способы отыскания интерполяционного многочлена и различные формы записи.

Формула (4.9) позволяет сравнительно просто получить интерполяционный многочлен.

Пример 1. Для функции $\sin \pi x$ построить интерполяционный многочлен Лагранжа, выбрав узлы

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{6},\ x_2 = \frac{1}{4},\ x_3 = \frac{1}{2}.$$

Вычисляем значения функции:

$$y_0 = \sin 0 = 0,\ y_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ y_2 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y_3 = \\ = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Пользуясь формулой (4.9), получаем искомый многочлен:

$$L(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(0-\frac{1}{6}\right)\left(0-\frac{1}{4}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)}\cdot 0 +$$

$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+$$

$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}\cdot 1.$$

Производя вычисление, получим:

$$L(x) = (132 - 96\sqrt{2})x^3 + (64\sqrt{2} - 91)x^2 + \left(\frac{29}{2} - 8\sqrt{2}\right)x.$$

Мы получили функцию, приближенно выражающую $\sin \pi x$, т. е.

$$\sin \pi x \approx (132 - 96\sqrt{2})x^3 + (64\sqrt{2} - 91)x^2 + \left(\frac{29}{2} - 8\sqrt{2}\right)x,$$

или

$$\sin \pi x \approx -3{,}764\,x^3 - 0{,}4903\,x^2 + 3{,}186\,x. \qquad (4.\ 10)$$

Пользуясь этой приближенной формулой, удобной для вычисления, можем находить значение синуса любых углов от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Мы приходим к весьма интересному факту: зная значения синуса углов 30°, 45° 90°, мы можем при помощи интерполяции найти синус любого острого угла. Как показывают вычисления и теоретические расчеты, значения синуса по формуле (4.10) мы можем получить с точностью, по крайней мере, до двух десятичных знаков. Например, полагая в формуле (4.10) $x = 0{,}1$ и $x = 0{,}4$, получим: $\sin 18^\circ = \sin 0{,}1\pi \approx 0{,}3099$, $\sin 72^\circ = \sin 0{,}4\pi \approx 0{,}9551$. Для сравнения укажем соответствующие значения с семью верными знаками: $\sin 18^\circ = 0{,}3090170\ldots$, $\sin 72^\circ = 0{,}9510565\ldots$.
Если построить интерполяционный многочлен с использованием в качестве узловой точки $x=\frac{2}{3}$, то получим более точную формулу, погрешность уменьшится примерно в пять раз. (Рекомендуется в качестве упражнения построить такой интерполяционный многочлен. Пользуясь им, найти $\sin 18^\circ$ и $\sin 72^\circ$ и сравнить с точными значениями и с значениями, полученными по формуле (4.10).

Пример 2. Для функции 2^x построить интерполяционный многочлен Лагранжа, выбрав узлы: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Вычисляем значения функции: $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$.

По формуле (4.9) находим:

$$L(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + 1. \tag{4.11}$$

Проверьте эту запись, применив формулу (4.9) и проделав все вычисления. Рассмотрите многочлен $L(x)$ в его окончательном виде (4.11) и убедитесь в том, что в данных узлах $L(x)$ принимает указанные значения $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4. Подставив $x = \frac{1}{2}$ в формулу (4.11), найдите приближенное значение $2^{1/2}$, сравните с точным ($2^{1/2} = \sqrt{2}$). По формуле (4.11) найдите также $2^{0,3}$, $2^{-0,7}$.

§ 30. Оценка погрешности интерполяционной формулы Лагранжа

Многочлен Лагранжа в узлах интерполяции принимает значения, совпадающие с соответствующими значениями данной функции, а в остальных точках сегмента $[a; b]$ дает приближенное выражение данной функции. Важно, конечно, оценить погрешность этого приближения, т. е. установить, насколько близок многочлен Лагранжа к данной функции. Для этой цели рассматривают разность

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x). \tag{4. 12}$$

Функция $R_n(x)$ называется остаточным членом формулы Лагранжа. Оценка погрешности сводится к оценке остаточного члена. Для остаточного члена существует формула, удобная для оценки. Укажем здесь эту формулу. Будем предполагать, что функция имеет на отрезке $[a;\ b]$ производные до $(n+1)$-го порядка включительно.

Введем обозначение

$$\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ \ldots\ (x - x_n). \tag{4. 13}$$

Функция $\Pi(x)$ есть, очевидно, многочлен $(n+1)$-й степени. Он нам известен, так как известны числа $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$.

Формула остаточного члена такова:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\Pi(x), \tag{4. 14}$$

где ξ — число, содержащееся внутри отрезка $[a;\ b]$.

ξ зависит от x.

Так как ξ нам неизвестно, то мы воспользуемся оценкой производной $f^{(n+1)}(x)$ для любых $x \in [a;\ b]$. Обозначим M_{n+1} наибольшее значение $|f^{(n+1)}(x)|$ для всех x отрезка $[a;\ b]$. Тогда из формулы (4. 14) следует такая оценка остаточного члена

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\Pi(x)|. \tag{4. 15}$$

Проведем доказательство формулы (4.14) для случая $n=1$. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$ и пусть на этом отрезке она имеет производную второго порядка $f''(x)$. На отрезке $[a;\ b]$ мы выбираем два узла интерполирования x_0 и x_1. Интерполяционный многочлен $L_1(x)$ будет первой степени, т. е. это будет линейная функция.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = f(x) - L_1(x) - k\pi(x), \tag{4.16}$$

где

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1). \tag{4.17}$$

Функция $g(x)$ имеет на отрезке два корня, x_0 и x_1 (так как $f(x_0) = L_1(x_0)$ и $f(x_1) = L_1(x_1)$. Рассмотрим произвольную точку x отрезка $[a;\ b]$, не совпадающую с x_0 и x_1, будем считать ее фиксированной. Подберем в (4.16) постоянный коэффициент k так, чтобы функция $g(x)$ обращалась в нуль в точке $\bar{x}$, т. е.

$$f(\bar{x}) - L_1(\bar{x}) - k\,\pi(\bar{x}) = 0. \tag{4. 18}$$

Итак, функция $g(x)$ обращается в нуль в трех точках $x_0, x_1, \bar{x}$.

В силу теоремы Ролля $g'(x)$ обращается в нуль хотя бы в двух точках ξ_1 и ξ_2 отрезка $[a; b]$ (см. рис. 14). Но тогда

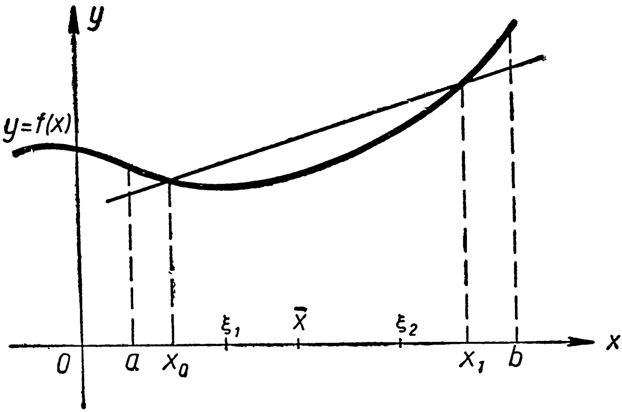

Рис. 14

в силу той же теоремы Ролля $g''(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке ξ между ξ_1 и ξ_2. Ясно, что ξ будет между a и b, т. е. мы можем написать:

$$f''(\xi) - L_1''(\xi) - k\pi''(\xi) = 0,$$

но $L_1''(x) \equiv 0$, так как $L_1(x)$ есть многочлен первой степени, $\pi''(x) \equiv 2$, так как $\pi(x)$ есть многочлен второй степени (см. 4.17).

Поэтому

$$f''(\xi) - 2k = 0,$$

$$k = \frac{f''(\xi)}{2}.$$

Стало быть, из (4.18) получаем:

$$R_1(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L_1(\bar{x}) = \frac{f''(\xi)}{2}\pi(\bar{x}). \tag{4.19}$$

Мы полагали, что $\bar{x}$ отлично от x_0 и x_1. Но теперь непосредственной проверкой можно убедиться, что равенство (4.19) верно и в случае, когда $\bar{x} = x_0$ или $\bar{x} = x_1$. Так как

$\bar{x}$ — любая точка отрезка $[a; b]$, то будем писать вместо $\bar{x}$ просто x. Таким образом, имеем:

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}\,\pi(x) = \frac{f(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1). \qquad (4.20)$$

Это и есть формула (4.14) в случае $n=1$. Подобным образом, выполняя несколько более громоздкие записи, можно провести доказательство для произвольного n (см. [1] стр. 535—537).

Пример. Применим формулу (4.15) для оценки погрешности многочлена Лагранжа, построенного в примере 2 предыдущего пункта. Рассматривалась функция $f(x) = 2^x$ на отрезке $[-1; 2]$. Мы взяли $n = 3$. Найдем производную $(n + 1)$-го порядка, т. е. 4-го порядка:

$$f^{(IV)}(x) = 2^x\,(\ln 2)^4.$$

Так как при $-1 \leqslant x \leqslant 2$ имеем: $2^x \leqslant 4$, то

$$M_4 = 4 \cdot (\ln 2)^4.$$

Мы знаем, что $\ln 2 = 0{,}693\ldots < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому

$$M_4 < 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Далее

$$\Pi(x) = x(x + 1)(x - 1)(x - 2).$$

Поэтому, применяя (4.15), получим:

$$|R_3(x)| \leqslant \frac{1}{24}\,|x(x+1)(x-1)(x-2)|.$$

В частности, при вычислении приближенного значения функции при $x = \frac{1}{2}$ при помощи многочлена Лагранжа погрешность может быть оценена по этой формуле, и мы получим:

$$\left|R_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{128} < 0{,}024,$$

т. е. погрешность меньше чем 0,024. На самом деле, обычно погрешность значительно меньше, чем тот предел погрешности, который указывается формулой. У нас фактически погрешность оказалась меньше чем 0,008 (проверьте).

Упражнения. 1) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $\sqrt{x}$ на отрезке $[100; 200]$ с узлами интерполяции

$$x_0 = 100;\ x_1 = 121;\ x_2 = 144;\ x_3 = 196.$$

Оценить погрешность при вычислении при помощи многочлена Лагранжа $\sqrt{135}$. Указание. Раскрывать скобки, содержащие x, не обязательно.

2) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $\lg x$ на отрезке $[1; 100]$ с узлами $x_0 = 1$, $x_1 = 10$, $x_2 = 100$. Оценить погрешность при вычислении при помощи этого многочлена $\lg 2$, $\lg 37$, $\lg 89$.

§ 31. Линейное интерполирование

Рассмотрим частный случай интерполяционной формулы Лагранжа, когда $n=1$. В этом случае будет всего два узла x_0 и x_1.

Формула (4.9) примет вид:

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1.$$

Или после преобразования:

$$L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \qquad (4.21)$$

Это есть линейная функция, значения которой в точках x_0, x_1 совпадают со значениями данной функции y_0, y_1. Замена данной функции таким образом подобранной линейной функцией и есть линейная интерполяция, которая изучалась в курсе «Элементарная математика» на I курсе института. Мы можем, стало быть, написать:

$$f(x) \approx y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Линейная интерполяция встречается в практике вычислений наиболее часто как наиболее простой вид интерполяции. Линейная интерполяция применяется в курсе средней школы в практике вычислений с помощью таблиц. Простота и доступность линейной интерполяции объясняется тем, что она может быть обоснована с помощью простого допущения, что приращение функции пропорционально приращению аргумента. Но если так, то нужно ли интерполирование высших порядков? Нельзя ли обойтись линейным интерполированием? Конечно, линейное интерполирование применить всегда можно. Но при этом возможны столь значительные ошибки, что полученный результат не будет достаточно точен. Если линейное интерполирование не даст достаточной точности, то приходится применять интер-

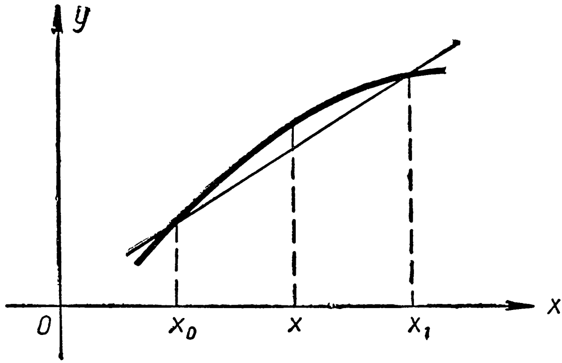

Рис. 15

полирование при помощи многочленов второй, третьей и более высоких степеней.

Геометрически линейное интерполирование означает замену криволинейной дуги графика его хордой (рис. 15).

Оценка погрешности линейной интерполяции может быть определена формулой (4.20).

Обозначая $M = \max\limits_{a<x<b} |f''(x)|$, получим такую оценку

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} M \,|\underset{a<x\leqslant b}{(x - x_0)(x - x_1)}|. \qquad (4.22)$$

Если допустить более грубую оценку, то можно получить более простую формулу. Рассмотрим функцию $\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1)$ на отрезке $[x_0; x_1]$. Она неотрицательна, и ее наибольшее значение равно $\frac{(x_1 - x_0)^2}{4}$. Поэтому из (4.22) получаем такое неравенство:

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M(x_1 - x_0)^2}{8} \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1). \qquad (4.23)$$

Если нужно оценить погрешность в данной конкретной точке, то лучше пользоваться формулой (4.22). Если же мы хотим дать единую оценку погрешности для всего отрезка $[x_0; x_1]$, то надо пользоваться формулой (4.23).

Для облегчения линейного интерполирования употребляются таблицы «пропорциональных частей» («*P.P*»), при помощи которых можно быстро находить «поправки». Студент должен вспомнить правила пользования таблицами, в частности добиться хорошего навыка в пользовании таблицами с помощью «*P.P*».

Упражнения. 1) Пользуясь четырехзначными таблицами логарифмов, найти lg 10,83, lg 4,466, lg 8374.

При этом вы будете пользоваться линейным интерполированием. Оцените по формуле (4.22) или (4.23) погрешность линейного интерполирования и на основании этой оценки убедитесь в том, что в полученном значении все четыре десятичных знака верны.

2) Выпишите табличку четырехзначных десятичных логарифмов чисел 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100. Пользуясь только этой табличкой и применяя линейное интерполирование, найдите lg 17, lg 46, lg 84.

Сравните со значениями, взятыми из полной таблицы. Оцените погрешность линейного интерполирования по формулам (4.22) и (4.23). Можно ли сделать вывод о допустимости линейного интерполирования?

§ 32. Лабораторная работа № 3

Тема. *Интерполирование с применением формулы Лагранжа* (4 часа).

Задание 1. Функция $f(x)$ задана таблицей, записанной в следующем виде:

k	0	1	2	3	4
x_k					
y_k					

Пользуясь формулой Лагранжа (4.9), найти интерполяционный многочлен четвертой степени, упростить его. Подстановкой проверить, что полученный многочлен в данных узлах x_k принимает соответствующие значения y_k. Вычислить, пользуясь найденным многочленом, значение функции при некотором заданном промежуточном значении аргумента.

Указание. Если даны большие числа, то для упрощения вычислений провести замену переменных x и y, полагая $x = a\xi$, $y = b\eta$, выбрав подходящим образом a и b.

Например, данные таковы

x	20	40	80	120
y	600	400	700	1500

Произведем замену: $x = 20\xi$; $y = 100\eta$. Тогда таблица примет вид:

ξ	1	2	4	6
η	6	4	7	15

Получив интерполяционный многочлен для переменных ξ, η, следует затем вернуться к переменным x и y.

Задание 2. Для функции, имеющей аналитическое выражение, задана таблица значений на некотором отрезке $[a, b]$. Пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа, определить приближенное значение данной функции в некоторой промежуточной точке. Оценить погрешность полученного приближенного значения по формуле (4.15).

Порядок выполнения задания 2. 1) Так как здесь не требуется получить многочлен Лагранжа в стандартной форме, а требуется найти лишь численное значение в данной точке $\overline{x}$, то запишем формулу (4.9) в виде, удобном для вычисления численного значения:

$$L_n(x) = \Pi(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{(x - x_k)\,\Pi_0(x_k)}. \qquad (4.24)$$

Здесь

$$\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n), \qquad (4.25)$$

$$\Pi_0(x) = (x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_n). \qquad (4.26)$$

Составив надлежащим образом расчетную таблицу, производим вычисления при заданном значении x.

2) Находим $f^{(n+1)}(x)$ и оцениваем $|f^{(n+1)}(x)|$ в данном отрезке $[a;\ b]$. Обозначим M число, для которого справедливо неравенство

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M \text{ для } x \in [a;\ b]$$

(не обязательно M есть наибольшее значение $|f^{(n+1)}(x)|$ на $[a;\ b]$.

3) Оцениваем погрешность полученного значения, учитывая погрешность метода, погрешности данных и возможные погрешности промежуточных вычислений.

ГЛАВА 5
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА

Интерполяционный многочлен Лагранжа решает в общем случае задачу параболического интерполирования. Однако в большинстве вычислительных задач удобнее применять интерполяционный многочлен, записанный в других формах. Удобными формами записи интерполяционного многочлена являются две интерполяционные формулы Ньютона.

Заметим, что при рассмотрении многочлена Лагранжа узлы интерполирования мы брали как угодно, промежутки между двумя соседними узлами могли быть и равные, и не равные. В настоящем параграфе мы будем рассматривать задачу интерполирования только в случае равноотстоящих узлов, как это чаще всего бывает при работе с табличными данными. Разность между двумя соседними узлами обозначим h, она будет постоянна. Число h называется шагом интерполирования. Узлы x_0, x_1, ..., x_n будут записаны так:

$$x_0;\ \ x_1 = x_0 + h;\ \ x_2 = x_0 + 2h,\ \ ...,\ \ x_n = x_0 + nh.$$

Соответствующие значения функции $f(x)$ будем записывать, как прежде, y_0, y_1, ..., y_n.

§ 33. Конечные разности различных порядков

Пусть дана функция $f(x)$ и равноотстоящие узлы x_0, x_1,..., x_n. Разностью первого порядка называется приращение функции при переходе от одного узла к следующему. Вводим обозначения разностей первого порядка:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \ldots,\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}. \quad (5.1)$$

Заметим, что Δy_i означает разность $y_{i+1} - y_i$, т. е. индекс i есть номер начального значения функции.

Разности первого порядка хорошо известны студенту, они применяются при линейном интерполировании, в частности в курсе математики средней школы. Нередко они указываются в таблицах («Табличные разности»). Приведем в качестве примера отрывок из таблицы тригонометрических функций (см. [4]).

x_k	$\sin x_k$	Δy_k
11°46′	0,20393	28
11°47′	0,20421	29
11°48′	0,20450	28
11°49′	0,20478	29
11°50′	0,20507	

(Заметим, что в разностях пишут только значащие цифры: разность 28 означает 0,00028.)

Приращение разности первого порядка при переходе от одного узла к соседнему называется разностью второго порядка и обозначается так:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\quad \ldots,\quad \Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$$

(обратите внимание на смысл индекса разности второго порядка). Подобным образом вводятся разности третьего, четвертого и т. д. порядков:

$$\Delta^3 y_k = \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k \text{ (разность третьего порядка),}$$

$$\Delta^4 y_k = \Delta^3 y_{k+1} - \Delta^3 y_k \text{ (разность четвертого порядка).}$$

Вообще,

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k \text{ (разность порядка } m).$$

Для иллюстрации составим таблицу значений функции $y = x^3$ с шагом $h = 1$ и найдем разности различных порядков. Получим таблицу разностей. Запишем ее так:

Таблица 7 (5. 2)

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0	0	0	1	6	6	0
1	1	1	7	12	6	0
2	2	8	19	18	6	0
3	3	27	37	24	6	—
4	4	64	61	30	—	—
5	5	125	91	—	—	—
6	6	216	—	—	—	—

Заметим, что в этой таблице расположение записей разностей таково: в одну строчку пишем значения аргумента, функции и всех разностей с одним и тем же индексом. Например, в первой строке записано x_0, y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$, во второй строке —x_1, y_1, Δy_1, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^4 y_1$ и т. д. Таблица разностей такого типа называется горизонтальной.

Таблицу разностей записывают и иначе: разность пишут в промежутке между теми значениями функции или разностями низшего порядка, из которых получена данная разность. Таблица, записанная по такому правилу, называется диагональной таблицей разностей:

Таблица 8 (5.3)

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0	0				
		1			
1	1		6		
		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		0
		37		6	
4	64		24		0
		61		6	
5	125		30		
		91			
6	216				

Обратим внимание, что в рассмотренной таблице разностей функции x^3 разность третьего порядка есть величина постоянная, а разность четвертого порядка равна нулю.

Упражнение. Составить таблицу разностей для таблицы значений функции (значение функции брать с пятью знаками):

$\sin x$, $x = 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°$.

§ 34. Выражение разностей различных порядков через значения функции

Имеем по определению

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k. \tag{5. 4}$$

Для второй разности получим:

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = \\ = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k. \tag{5. 5}$$

Для третьей разности:

$$\Delta^3 y_k = \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k = (y_{k+3} - 2y_{k+2} + y_{k+1}) - \\ - (y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k) = y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k. \tag{5. 6}$$

По аналогии можем написать:

$$\Delta^m y_k = y_{k+m} - m y_{k+m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} y_{k+m-2} - \\ - \ldots + (-1)^{m-1} m y_{k+1} + (-1)^m y_k. \tag{5. 7}$$

Справедливость формулы (5.7) можно доказать методом полной математической индукции: формула верна для $m = 1, 2, 3$. Остается показать, что из справедливости формулы для некоторого m вытекает ее справедливость для $m + 1$.

§ 35. Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть даны значения x через равные промежутки: x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x_n = x_0 + nh$ и соответствующие значения функции $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Составим таблицу разностей.

Таблица 9

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$		$\Delta^{n-1} y_k$	$\Delta^n y_k$
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	. . . . .	$\Delta^{n-1} y_0$	$\Delta^n y_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	. . . . .	$\Delta^{n-1} y_1$	—
2	x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	. . . . .	—	—
3	x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$	. . . . .	—	—
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$n-1$	x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}	—	—	. . . . .	—	—
n	x_n	y_n	—	—	—	. . . . .	—	—

Нашей целью является отыскание интерполяционного многочлена при данных узлах интерполяции. Такой многочлен существует, и он является единственным, он может быть найден по формуле Лагранжа. Но мы желаем получить его в другой форме записи.

Запишем искомый многочлен $P_n(x)$ в виде

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{5. 8}$$

Ясно, что это — многочлен n-й степени. Найдем его коэффициенты из того условия, что в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$ значения многочлена совпадают с данными числами $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Положим в (5.8) $x = x_0$, получим:

$$P_n(x_0) = a_0.$$

Но $P(x_0) = y_0$. Значит, $a_0 = y_0$.

Полагаем теперь $x = x_1$, получаем:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x_1 - x_0),$$

т. е.

$$y_1 = y_0 + a_1 h,$$

отсюда

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Полагаем теперь $x = x_2$, получим:

$$P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

или

$$y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot 2h + a_2 \cdot 2h \cdot h,$$

отсюда

$$y_2 - 2\Delta y_0 - y_0 = 2h^2 a_2,$$

или, так как $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, получим:

$$2h^2 a_2 = y_2 - 2y_1 + y_0. \tag{5. 9}$$

Из (5.5) следует, что

$$y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta^2 y_0,$$

Стало быть, (5.9) может быть записано так:

$$2h^2 a_2 = \Delta^2 y_0,$$

т. е.

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Точно так же получим, учитывая (5.5), (5.6),

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!\, h^3}.$$

Подобным образом найдем a_4, a_5, ... При этом замечаем, что a_k можно записать в общем виде следующим образом:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\, h^k}. \qquad (5.\ 10)$$

Справедливость формулы (5.10) можно доказать методом математической индукции.

Найдя все коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$, можем записать функцию $P_n(x)$ следующим образом:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \qquad (5.\ 11)$$

Для практического применения формулу (5.11) удобнее записать в другом виде. Введем обозначение:

$$\frac{x - x_0}{h} = t, \text{ или } x = x_0 + t\,h.$$

Тогда множители, входящие в формулу (5.11), можно выразить через t таким образом:

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1,$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - 2p}{h} = t - 2,$$

. . . .

. . . .

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_0 - (n-1)\,h}{h} = t - n + 1.$$

Формула (5.11) примет вид:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \qquad (5.12)$$

Это и есть первая интерполяционная формула Ньютона.

Заметим, что если в формуле (5.12) положить t равным целому числу ($t = 0, 1, 2, \dots$), то $x_0 + th$ будет совпадать с одним из узлов интерполяции: $x_0, x_1, \dots, x_n$. Значение многочлена $P_n(x)$ будет равно соответственно одному из известных чисел $y_0, y_1, \dots, y_n$. Стало быть, вычисление по формуле (5.12) есть смысл выполнять для нецелых значений t. Тогда мы получим значения функции, отсутствующие в данной таблице, что и является целью процесса интерполяции. Собственно, формулой (5.12) следует пользоваться для вычисления значений функции для значений x из интервала $(x; x_0 + h)$. В этом случае t будет меньше 1.

Если же $x > x_0 + h$, т. е. $x > x_1$, то нецелесообразно пользоваться формулой (5.12), так как будет $t > 1$. В этом случае удобно применить формулу (5.12), если только за x_0 принять узел интерполяции, ближайший к x. Для удобства пользования формулой (5.12) существуют таблицы коэффициентов этой формулы для значений t, меньших единицы.

Изложим теперь схему практического применения формулы Ньютона. Пусть дана таблица значений некоторой функции с шагом h. Нам нужно найти значение функции для некоторого значения x, промежуточного между двумя соседними табличными значениями a и $a + h$. Принимаем число a за x_0 и составляем таблицу разностей для ряда следующих узлов: $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$. Сколько же узлов нужно взять? Если мы возьмем n узлов, не считая начального x_0, то мы можем найти разности до n-го порядка. Нам нужно вычислить разности до такого порядка, когда они уже очень малы или равны нулю. В ходе составления таблицы мы увидим, разности какого порядка являются достаточно малыми. Получив такие разности, мы прекратим дальнейшее составление таблицы.

Далее находим $t = \frac{x - x_0}{h}$ и применяем формулу.

Конечно, при этом составляем расчетную схему, удобную для вычислений. Значения коэффициентов удобно находить из таблицы.

Пример 1. Дана таблица значений функции. Написать интерполяционную формулу Ньютона четвертого порядка (т. е $n = 4$).

k	0	1	2	3	4
x_k	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
y_k	3365	4700	5878	6931	7885

Составим таблицу разностей:

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0	1,4	3365	1335	—157	32	—6
1	1,6	4700	1178	—125	26	—
2	1,8	5878	1053	—99	—	—
3	2,0	6931	954	—	—	—
4	2,2	7875	—	—	—	—

Теперь можем записать формулу Ньютона для данной функции. В формуле (5.12) положим $x_0 = 1{,}4$, $h = 0{,}2$. Заметим, что $P_n(x)$ есть приближенное выражение данной функции. Поэтому запишем так:

$$f(1{,}4 + 0{,}2t) \approx 3365 + 1335t - 157 \cdot \frac{t(t-1)}{2} + $$
$$+ 32 \cdot \frac{t(t-1)(t-2)}{6} - 6\,\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{24}.$$

Придавая здесь t любое значение, $0 < t < 1$, мы получим приближенное значение данной функции при значении аргумента x, удовлетворяющего неравенству $1{,}4 < x < 1{,}6$.

§ 36. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Первая интерполяционная формула Ньютона, т. е. формула (5.12), служит для интерполирования «вперед».

Теперь получим другую интерполяционную формулу, удобную для нахождения значений функции при значении аргумента, меньшего чем начальное. Полученная формула будет служить для интерполирования «назад».

Пусть опять даны узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ с шагом h и соответствующие значения функции $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Найдем значения функции для x, удовлетворяющих условию: $x_{n-1} < x < x_n$. Построим интерполяционный многочлен таким образом:

$$\overline{P}_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ + \ldots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1). \qquad (5.13)$$

Найдем коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$, исходя из условия

$$\overline{P}_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Так, полагая $x = x_n$, получим: $a_0 = y_n$; полагая $x = x_{n-1}$, можем написать:

$$y_{n-1} = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n),$$

т. е. $y_{n-1} = y_n - a_1 h$. Отсюда

$$a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

Далее, полагая $x = x_{n-2}$, получим:

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\, h^2}.$$

Общая формула для коэффициента a_k будет

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!\, h_k}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (5.13), получим искомый многочлен в виде

$$\overline{P}_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1 \cdot h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\, h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1). \quad (5.14)$$

Преобразуем эту формулу, введя обозначение

$$\frac{x - x_n}{h} = t, \text{ или } x = x_n + ht.$$

Формула (5.14) примет вид

$$\overline{P}_n(x) = \overline{P}_n(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \\ + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \qquad (5.15)$$

Формула (5.15) есть вторая интерполяционная формула Ньютона, или интерполяционная формула Ньютона для интерполирования «назад».

При помощи формулы (5.15) удобно вычислять значения функции для x, заключенных между x_{n-1} и x_n. При этом $-1 < t < 0$.

Пример. Найти lg 17,4 по таблице lg x для $x=14$, 15, 16, 17, 18 с пятью десятичными знаками. Так как 17,4 находится не в начале таблицы, а ближе к ее концу, то применим вторую интерполяционную формулу Ньютона: осуществим интерполирование назад. Положим $n = 4$, значит, $x_n = 18$, $y_n = 1{,}25527$. Далее применяем формулу (5.15), полагая в ней

$$h = 1,\ t = \frac{17{,}4 - 18}{1} = -0{,}6, \quad \Delta y_{n-1} = \Delta y_3 = 0{,}02482,$$

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta^2 y_2 = -0{,}00151, \quad \Delta^3 y_{n-3} = \Delta^3 y_1 = 0{,}00019,$$

$$\Delta^4 y_{n-4} = \Delta^4 y_0 = -0{,}00004.$$

Вычисления располагаем в расчетную таблицу (см. табл. 11).

§ 37. Оценка погрешности интерполяционных формул Ньютона

Пусть $f(x)$ — данная функция, $P_n(x)$ — интерполяционный многочлен Ньютона. Функция $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ называется остаточным членом формулы Ньютона. Оценить погрешность формулы Ньютона — значит оценить остаточный член. Приводим без доказательства формулы остаточного члена для интерполяционных формул Ньютона.

Для первой формулы Ньютона

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \qquad (5.16)$$

Таблица 10

x	t	y_0	$t\,\Delta\,y_0$	$\frac{t(t-1)}{2!}$	$\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0$	$\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}$	$\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0$	$\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}$	$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\Delta^4 y_0$	$y = f(x_0 + h\,t)$
14,5	0,5	1,14613	0,01498	—0,125	0,00024	0,0625	0,000014	—0,03906	0,000001	1,16136

Таблица 11

x	t	y_4	$t\,\Delta\,y_3$	$\frac{t(t+1)}{2!}$	$\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_2$	$\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}$	$\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_1$	$\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}$	$\frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_0$	$y = f(x_4 + t\,h)$
17,4	—0,6	1,25527	—0,01489	—0,12	0,00018	—0,056	—0,00001	—0,0336	0,000001	1,24055

Для второй формулы Ньютона

$$\overline{R}_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t+1)\ \dots\ (t+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \qquad (5.17)$$

Здесь ξ — некоторое число, заключенное между x_0 и x_n.

Если $\Delta^{n+1}y$ почти постоянны для функции $y = f(x)$ и h достаточно мало, то приближенно можно положить для первой формулы

$$R_n(x) \approx \frac{t(t-1)\ \dots\ (t-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_0, \qquad (5.16\text{a})$$

для второй формулы

$$\overline{R}_n(x) = \frac{t(t+1)\ \dots\ (t+n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_0. \qquad (5.17\text{a})$$

Формулы (5.16), (5.17) неудобны для практического применения ввиду того, что значение ξ неизвестно, а также ввиду громоздкости формул. Поэтому укажем более грубую, но простую оценку.

Обозначим $M_{n+1} = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_n} |f^{(n+1)}(x)|$.

Нетрудно доказать, что

$$|t(t-1)(t-2)\ \dots\ (t-n)| \leqslant \frac{n!}{4}.$$

Значит, из формулы (5.16) получаем такую оценку:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{4(n+1)}h^{n+1}. \qquad (5.18)$$

Формула (5.18) справедлива также в случае интерполирования назад. Формулой (5.18) и рекомендуется преимущественно пользоваться на практике.

Если $\Delta^{n+1}y$ почти постоянны и h достаточно мало, то оценку $f^{(n+1)}(x)h^{n+1}$ можно заменить оценкой $\Delta^{n+1}y$. Значит, оценку (5.18) можно заменить такими оценками:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{4(n+1)}|\Delta^{n+1}y_0|, \quad \text{(для первой формулы)}, \qquad (5.19)$$

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{4(n+1)}|\Delta^{n+1}y_n|, \quad \text{(для второй формулы)}. \qquad (5.20)$$

§ 38. Линейное и квадратичное интерполирование

Отметим прежде всего главные особенности, отличающие интерполяционные формулы Ньютона и Лагранжа. В формуле Лагранжа каждое из слагаемых есть многочлен n-й степени и слагаемые равноправны. В формуле Ньютона слагаемыми являются многочлены повышающихся степеней, коэффициенты суть конечные разности повышающихся порядков, деленные на факториалы. Таким образом, в формуле Ньютона слагаемые убывают с возрастанием номера, и мы можем пренебречь несколькими последними слагаемыми. Из этих соображений мы получаем частные случаи формулы Ньютона. Отметим здесь две наиболее часто встречающиеся формулы, получающиеся из формулы Ньютона.

а) Формула линейного интерполирования.

Если в формуле (5.12) мы возьмем только два члена, то получим

$$f(x_0 + th) \approx y_0 + t\,\Delta y_0, \tag{5.21}$$

или

$$f(x) \approx y_0 + \frac{x - x_0}{h}(y_1 - y_0). \tag{5.22}$$

Это есть формула *линейного интерполирования*. Оценка погрешности линейного интерполирования может быть получена из формул (5.16), (5.18), (5.19), если в них положим $n = 1$. Получаем такие оценки:

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} M_2 t(1 - t), \tag{5.24}$$

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{8} M_2 h^2. \tag{5.25}$$

Если h достаточно мало, а вторые разности почти постоянны, то

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{8} |\Delta^2 y_0|. \tag{5.26}$$

Из оценки (5.26) можно получить простое практическое правило, позволяющее судить о том, при каких условиях применима формула линейного интерполирования. Если h достаточно мало, а вторые разности почти постоянны, то из (5.26) заключаем, что если $\Delta^2 y_0$ не более четырех единиц низшего разряда, то погрешность не превышает $\frac{1}{2}$ единицы низшего разряда. Значит, погрешность линейного интерполирования не оказывает влияния на десятичные знаки числа. Из этого следует такой практический вывод: на данном участке таблицы допустимо применение линейного интерполирования, если вторые разности почти постоянны и по абсолютному значению не превышают четырех единиц низшего разряда.

б) Формула квадратичного интерполирования.

Если взять в формуле (5.12) три первых члена, то получим такую формулу:

$$f(x_0+th)\approx y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0. \qquad (5.23)$$

Эта формула называется формулой *квадратичного интерполирования*.

Формулу квадратичного интерполирования приходится иногда применять на тех участках таблицы, где неприменимо линейное интерполирование. Проверка применимости квадратичного интерполирования может быть осуществлена на практике при помощи такого простого правила, которое получается из оценки остаточного члена: на данном участке таблицы допустимо квадратичное интерполирование, если третьи разности почти постоянны и по абсолютному значению не превышают семи единиц низшего разряда.

Это правило можно обосновать, пользуясь оценкой погрешности (5.16а). В самом деле, пусть разности третьего порядка почти постоянны. Тогда по формуле (5.16а) имеем (полагаем $n=2$):

$$|R_2(x)|\leqslant\frac{t(t-1)(t-2)}{6}\,|\Delta^3 y_0|.$$

Исследуем функцию $\pi^*(t)=\frac{1}{6}t(t-1)(t-2)$ на отрезке $0\leqslant t\leqslant 1$. Ее наибольшее значение есть $\frac{1}{9\sqrt{3}}$, что лишь немногим более $\frac{1}{16}$, но меньше $\frac{1}{15}$. Значит, если $|\Delta^3 y_0|<7$ (единиц низшего разряда), то

$$|R_2(x)|\leqslant\frac{7}{15}<\frac{1}{2}.$$

Стало быть, погрешность менее половины единицы низшего разряда, что обеспечивает допустимость квадратичного интерполирования.

Пример. В таблице натуральных логарифмов, помещенных в книге [5], даны значения натуральных логарифмов для целых чисел от 1 до 109. Пользуясь этой таблицей, найти ln 15,6 двумя способами: 1) применяя линейное интерполирование, 2) применяя квадратичное интерполирование. Оценить погрешность в каждом случае.

Метод линейного интерполирования.

Применим интерполирование в отрезке $15 \leqslant x \leqslant 16$, узлы будут $x_0 = 15$, $x_1 = 16$. Значения функции: $y_0 = 2{,}7081$, $y_1 = 2{,}7726$.

По формуле линейного интерполирования получаем: $\ln 15{,}6 = \ln 15 + 0{,}6 \cdot 0{,}0645 = 2{,}7081 + 0{,}0387 = 2{,}7468$.

Для оценки погрешности найдем вторую производную:

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}.$$

На отрезке [15; 16] $|(\ln x)''| \leqslant \frac{1}{225}$. Итак, по формуле (5. 18) получим: $|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{225} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{1800} < 0{,}0006$.

Как видим, эта оценка гарантирует лишь то, что у найденного значения верны два десятичных знака, в третьем может быть ошибка на одну единицу.

Применим квадратичное интерполирование. Составим таблицу разностей, рассмотрев уже отрезок [15; 17].

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$
0	15	2,7081	645	—39
1	16	2,7726	606	
2	17	2,8332		

Применяя формулу (5.23), получим, полагая $t = 0{,}6$:

$$\ln 15{,}6 \approx \ln 15 + 0{,}6\Delta y_0 - \frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{2}\Delta^2 y_0 =$$

$$= 2{,}7081 + 0{,}6 \cdot 0{,}0645 + 0{,}12 \cdot 0{,}0039 = 2{,}7473.$$

Оценим погрешность по формуле (5.18). Найдем производную третьего порядка:

$$(\ln x)''' = \frac{2}{x^3}.$$

На отрезке [15; 17] имеем: $|(\ln x)'''| \leqslant \frac{2}{15^3}$.

Применяя формулу [5.18], полагая $h = 1$, $n = 2$, получим:

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{2}{12 \cdot 15} = \frac{1}{20 \cdot 250} \approx 0{,}00005.$$

Из этой оценки следует, что у найденного значения верны все четыре десятичных знака.

§ 39. Приложение формул Ньютона к табулированию функций

Пусть нужно составить таблицу функции $f(x)$, заданной аналитически, на отрезке $[a;\ b]$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-m}$ (т. е. с точностью до m-го десятичного знака). Перед тем как приступить к составлению таблицы, нужно решить ряд вопросов. Прежде всего, выбрать метод вычисления значений функции в таблице. Вычислять значения функции можно, например, при помощи ряда, можно вычислять значения данной функции, используя готовые таблицы элементарных функций, входящих в выражение данной функции. Существует много других приемов.

Вторым важным вопросом является определение шага таблицы. Шаг таблицы не выбирается произвольно, он зависит от тех требований, которые мы предъявляем к таблице. Остановимся подробно на вопросе о выборе шага. Главное — шаг таблицы и точность таблицы должны быть согласованы.

Если шаг таблицы очень мал, то такой таблицей пользоваться удобно: в ней можно найти значение функции для любого значения аргумента без применения интерполяции. Но при этом таблица будет очень объемистой, а составление ее оказывается слишком трудоемким делом. Если же шаг будет слишком велик, то таблица будет небольшой, ее составление не будет очень трудным, но пользоваться такой таблицей на практике неудобно: ввиду большого шага нередко придется вычислять значение функции для значений аргумента, не содержащихся в таблице. При этом, опять же ввиду чрезмерно большого шага, линейное интерполирование оказывается неприменимым, значение функции можно найти только путем применения интерполирования высших порядков, что на практике затруднительно. В силу указанных обстоятельств при составлении таблицы шаг таблицы избирают так, чтобы было допустимо линейное интерполирование, но при соблюдении этого условия шаг должен быть возможно большим. Шаг, найденный по этому правилу, является оптимальным. К тому же удобно, чтобы шаг был одинаков на протяжении всей таблицы. Впрочем, это требование не столь обязательно. Во многих случаях не удается выбрать постоянный шаг для всей таблицы. Тогда приходится разбивать весь интервал, для которого составляется таблица функции, на несколько частей и на каждой части устанавливать свой шаг.

Примером таблицы с постоянным шагом является четырехзначная таблица синусов [5]. В этой таблице шаг равен $6'$, он одинаков во всей таблице (таблица допускает линейное интерполирование). Таблица уменьшилась бы в объеме, если ее построить с шагом $10'$, при этом сохраняется свойство допустимости линейного интерполирования. Значит, таблица синусов с шагом $10'$ является лучшей (такая таблица в книге [6]).

Примером таблицы с чрезмерно большим шагом является таблица натуральных логарифмов, приведенная в книге [5]. Таблица дана для отрезка $1 \leqslant x \leqslant 109$. Шаг $h = 1$. Таблица допускает на отрезке $50 \leqslant x \leqslant 109$ линейное интерполирование, на отрезке $15 \leqslant x \leqslant 50$ — квадратичное, на отрезке $10 \leqslant x \leqslant 15$ — интерполирование третьего порядка, для $x < 10$ необходимо интерполирование более высоких порядков.

Существуют такие функции, для которых невозможно добиться не только того, чтобы на протяжении всей таблицы был один шаг и было бы допустимо линейное интерполирование, но и того, чтобы весь интервал разбить на несколько частей, в каждой из которых свой шаг, обеспечивающий линейное интерполирование. Такой функцией является $\operatorname{tg} x$ в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$. В четырехзначных таблицах тангенса [5] в интервале от 0 до 76° шаг равен $6'$ и возможно применение линейного интерполирования. От 76 до 90° шаг — $1'$. Причем на этом участке для x, близких к 90°, линейное интерполирование неприменимо. Для x, очень близких к 90°, неприменимо вообще никакое интерполирование. Это объясняется тем, что производная функция $\operatorname{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ неограниченно возрастает. В подобных случаях составляются таблицы с очень малым шагом. Например, в книге [4], кроме таблицы всех тригонометрических функций с шагом $1'$, помещены таблицы значений $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$ малых углов, именно для углов от 0 до $1°$ с шагом $1''$.

Итак, при составлении таблицы функции $f(x)$ на отрезке мы ставим перед собой задачу: при заданной точности таблицы $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-m}$ выбрать шаг h, такой, чтобы было возможно линейное интерполирование. При этом мы стремимся найти h возможно большим. Расчет шага таблицы можно провести таким образом. Найдем $f''(x)$ и найдем наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a;\ b]$, обозначим его M_2. Мы должны потребовать, чтобы погрешность линейной интерполяции была меньше ε. Но погрешность определяется формулой (5.25), стало быть, мы потребуем

$$\frac{M_2}{8} h^2 < \varepsilon,$$

отсюда

$$h \leqslant \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}}, \quad \text{или} \quad h \leqslant \sqrt{\frac{4}{M_2 \cdot 10^m}}. \tag{5.27}$$

При этом заметим, что шаг обычно берут равным числу с одной-двумя значащими цифрами (0,01; 0,25; 0,005 и т. д.).

Пример 1. Определить шаг в трехзначной таблице функции $y = \cos x$ в промежутке от 0 до $90°$ так, чтобы линейное интерполирование было возможным на всем интервале.

Находим $y'' = -\cos x$.

Так как $\max|\cos x| = 1$, то $M_2 = 1$.

У нас $\varepsilon = 0{,}0005$, стало быть, $h \leqslant \sqrt{\frac{8 \cdot 0{,}0005}{1}} \approx 0{,}06325$. Здесь число 0,06325 нужно понимать как радианную меру угла. Переводя в градусную, получаем: $h \leqslant 3°37'$.

Итак, шаг следует взять равным $3°$.

Пример 2. Длина дуги параболы с параметром p и стрелкой h определяется формулой $s = pL(t)$, где

$$L(t) = t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \quad t = \frac{a}{p}, \quad a = \sqrt{2ph}.$$

Требуется составить таблицу значений функции $L(t)$ с тремя десятичными знаками на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 5$. Определить шаг таблицы так, чтобы было возможно линейное интерполирование

Находим:

$$L''(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^{1/2}}.$$

Исследуем $L''(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 5$.

$$M_2 = \max_{0 \leqslant t \leqslant 5} |L''(t)| \leqslant 2.$$

Применяя теперь формулу (5. 27), получим: $h \leqslant \sqrt{\frac{2}{1000}} \approx$ $\approx 0{,}044$. Стало быть, шаг можно взять 0,04.

Пример 3. Найти шаг для таблицы функции $f(x) = 10^{-x}$ на отрезке $[0;\ 2]$ так, чтобы было возможно линейное интерполирование. Точность таблицы до восьмого десятичного знака.

Находим:

$$f''(x) = 10^{-x} (\ln 10)^2.$$

Функция $f''(x)$ убывает на отрезке $[0;\ 2]$ и положительна. Значит,

$$M_2 = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2} |f''(x)| = f''(0) = \ln (10)^2 \approx 5{,}302.$$

Из формулы (2. 27) находим, округляя M_2 в сторону увеличения:

$$h \leqslant \sqrt{\frac{4}{6{,}25 \cdot 108}} = \frac{2}{2{,}5 \cdot 10^4} = 0{,}8 \cdot 10^{-4}.$$

Итак, шаг можно взять 0,00005.

Упражнение. Найти оптимальный шаг таблицы функции в данном отрезке $[a;\ b]$ при данной точности, определяемой числом m верных десятичных знаков.

Функция	$[a;\ b]$	m
x^2	$[0;\ 10]$	6
x^3	$[0;\ 10]$	6
$\sqrt{x}$	$[10;\ 12]$	4
$\operatorname{arc\,tg} x$	$[0;\ 0{,}5]$	8
2^x	$[3;\ 4]$	3

§ 40. Лабораторная работа № 4

Тема. *Интерполирование с применением формул Ньютона* (6 час.).

Задание 1. Дана таблица значений функции $f(x)$, для которой известно аналитическое выражение. Узлы равноотстоящие. Шаг таблицы — h, точность — m десятичных знаков. Найти интерполяционный многочлен Ньютона, обеспечивающий заданную точность приближения. Вычислить значение функции в одной промежуточной точке или в начале таблицы, или в конце. Оценить погрешность.

Точность приближения определяется требованием, чтобы погрешность не превышала $\lambda \cdot 10^{-m}$, где λ — заданное число. Это значит, что погрешность не должна превышать λ единицы низшего разряда (часто полагают $\lambda = \frac{1}{2}$ или $\lambda = 1$).

Порядок выполнения задания. 1) Составить таблицу разностей для заданной таблицы значений функции. Обратить внимание на те разности определенного порядка, которые можно считать практически постоянными, обозначить k_0 порядок этих разностей. Разности более высокого порядка рассматривать не нужно.

2) Пользуясь таблицей разностей, дать грубую оценку порядка многочлена Ньютона, обеспечивающего требуемую точность. Это можно сделать, исходя из следующих приближенных оценок.

Оценка разностей	Порядок n многочлена Ньютона, обеспечивающий требуемую точность
$\lvert \Delta^2 y \rvert < 8\lambda$	$n = 1$
$\lvert \Delta^3 y \rvert < 16\lambda$	$n = 2$
$\lvert \Delta^4 y \rvert < 24\lambda$	$n = 3$
$\lvert \Delta^5 y \rvert < 32\lambda$	$n = 4$

3) Пусть в силу грубой оценки предварительно установлен порядок n многочлена Ньютона. Находим $f^{(n+1)}(x)$, определяем $M_{n+1} = \max \lvert f^{(n+1)}(x) \rvert$ на данном отрезке и оцениваем погрешность многочлена Ньютона по формуле (5.18).

Замечание. Если функция $f(x)$ такова, что ее производная $f^n(x)$ имеет простое общее выражение, и можно получить достаточно простое общее выражение для M_{n+1}, то можно в самом начале работы до составления таблицы разностей найти порядок многочлена Ньютона n, обеспечивающий требуемую точность. Для этого нужно найти n из неравенства

$$\frac{M_{n+1}}{4(n+1)} h^{n+1} < \lambda 10^{-m}.$$

Например, если $f(x) = \sin ax$, то $|f^{(n)}(x)| \leqslant a^n$, если $f(x) = \ln x$, то $|(\ln x)^{(n)}| = \frac{(n-1)!}{x^n}$.

Если интерполирование выполняется на отрезке [15; 18], то для функции $\ln x$

$$M_{n+1} = \frac{n!}{15^{n+1}}.$$

4) Составить расчетные бланки по схемам таблиц 11 и 10 для вычисления значений функции при заданных значениях аргумента. Подготовить необходимые вспомогательные таблицы для выполнения вычислений.

5) Выполнить все вычисления и найти значение функции в заданных точках.

Задание 2. Провести подготовительную работу для составления таблицы данной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a; b]$ с заданной точностью. Требуется: а) найти оптимальный шаг, обеспечивающий линейное интерполирование на протяжении всей таблицы, б) подготовить расчетную схему для составления таблицы и установить точность промежуточных вычислений.

Порядок выполнения задания. 1) Найти $f''(x)$ и исследовать ее на отрезке $[a; b]$. Найти $max\,|f''(x)|$ или хотя бы положительное число M_2, такое, что $|f''(x)| \leqslant M_2$ на отрезке $[a; b]$.

2) По формуле (5.27) оцениваем сверху шаг таблицы. Выбираем возможно больший шаг h, удовлетворяющий неравенству (5.27), который выражался бы десятичным числом с одной-двумя значащими цифрами.

3) Подготовить расчетный бланк для составления таблицы, установить точность промежуточных вычислений. Подобрать необходимые средства вычислений (машины и приборы) и вспомогательные таблицы.

4) Провести вычисление двух-трех значений функции.

Задание 3. Рассмотреть данную таблицу значений функции $f(x)$ (может быть указана таблица, помещенная в книге). Проверить, допустимо ли при пользовании таблицей линейное интерполирование, удачно ли выбран шаг таблицы (согласован ли он с точностью таблицы). Если недопустимо линейное интерполирование, то интерполирование какого порядка возможно (или на протяжении всей таблицы, или на той или иной ее части).

П о р я д о к в ы п о л н е н и я з а д а н и я. 1) Рассмотреть всю таблицу в целом, найти ее шаг. Если шаг неодинаков в различных частях отрезка $[a;\ b]$, то установить отрезки, в каждом из которых шаг постоянен.

2) Найти $f''(x)$ и исследовать на каждом отрезке, на котором шаг таблицы постоянен. На каждом таком отрезке найти M_2, $|f''(x)| \leqslant M_2$ и оценить по формуле (5.25) погрешность линейного интерполирования. Сделать вывод о допустимости линейного интерполирования. Проверить, нет ли возможности увеличить шаг таблицы.

3) Если окажется, что для данной таблицы не выполняются условия допустимости линейного интерполирования, проверить, допустимо ли квадратичное интерполирование. Для этого нужно найти $f'''(x)$, исследовать ее и применить формулу (5.18).

Примеры к заданию 1. П р и м е р 1. Дана таблица значений функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ для $x \in [75°;\ 79°]$ с шагом $h = 1°$.

x	75°	76°	77°	78°	79°
$\operatorname{tg} x$	3,732	4,001	4,331	4,705	5,145

Найти интерполяционный многочлен Ньютона, обеспечивающий заданную точность приближения $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

Вычислить значение функции $y = \operatorname{tg} x$ при $x = 75°13$.

1) Составляем таблицу разностей для данной таблицы значений функции.

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0	75°	3,732	279	41	13	—1
1	76°	4,001	320	54	12	—
2	77°	4,331	374	66	—	—
3	78°	4,705	440	—	—	—
4	79°	5,145	—	—	—	—

2) Оцениваем сначала разности третьего порядка. У нас $\lambda = \frac{1}{2}$, проверяем условие $|\Delta^3 y| < 16\lambda$, оно не выполняется. Оцениваем разности четвертого порядка. Условие $|\Delta^4 \cdot y| < 24\lambda$ выполняется. Итак, грубая оценка дает $n = 3$.

3) Находим $f^{(IV)}(x) = \dfrac{8\sin x\,(1+\sin^2 x)}{\cos^5 x}$. Замечаем, что на отрезке [75°; 79°] $\cos x > 0{,}19$, поэтому

$$|f^{(IV)}(x)| < 6\cdot 10^4.$$

Стало быть, можно взять $M_4 = 6\cdot 10^4$. Оценим погрешность по формуле (5.18). При этом учтем, что шаг h нужно выразить в радианной мере. Значит, $h = 0{,}0175$.

$$|R_3(x)| \leqslant \frac{6\cdot 10^4\,(0{,}0175)^4}{4\cdot 4} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-3} = \varepsilon.$$

Тем самым подтверждается, что многочлен Ньютона третьего порядка обеспечит требуемую точность. Этот многочлен таков:

$$3{,}732 + \frac{t}{1}\cdot 0{,}279 + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\cdot 0{,}041 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}013.$$

4) Вычисляем значения tg75°13′. Так как значение аргумента в начале таблицы, то применяем первую формулу Ньютона. Составляем расчетный бланк по схеме таблицы 11 и проводим вычисления. Получаем результат

$$\operatorname{tg} 75°13' \approx 3{,}789.$$

Пример 2. Дана таблица значений функции $f(x) = e^x$ на отрезке [4,1; 4,6] с шагом $h = 0{,}1$.

x	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
y	60,340	66,686	73,700	81,451	90,017	99,484

Найти интерполяционный многочлен Ньютона, обеспечивающий заданную точность приближения $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\cdot 10^{-3}$.

Вычислить значение функции e^x при $x = 4{,}53$. Оценить погрешность.

1) Функция e^x имеет простое выражение для n-й производной, именно $(e^x)^{(n)} = e^x$, поэтому легко определить $M_{n+1} = \max|f^{(n+1)}(x)|$ на данном отрезке. Так как функция e^x возрастает, то $\max|f^{(n+1)}(x)| = e^{4,6} < 100$, т. е. можно принять $M_{n+1} = 100$. Тогда порядок n многочлена Ньютона можно определить из неравенства:

$$\frac{M_{n+1}}{4(n+1)}h^{n+1} < \lambda\cdot 10^{-3}.$$

Для нашего примера получим неравенство:

$$\frac{1}{n+1} < 2\cdot 10^{n-4}.$$

Это неравенство справедливо при $n = 4$, что легко проверить непосредственно. Следовательно, нужно взять интерполяционный многочлен Ньютона четвертого порядка.

Так как $x = 4{,}53$ находится в конце таблицы, то нужно взять вторую формулу Ньютона, т. е.

$$P_4(t) = y_5 + t\Delta y_4 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_3 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_2 + + \frac{t(t+1)(t+3)(t+4)}{4!}\cdot\Delta^4 y_1.$$

2) Составим таблицу разностей для данной таблицы значений функции.

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0	4,1	60,340	6346	668	69	9
1	4,2	66,686	7014	737	78	8
2	4,3	73,700	7751	815	86	—
3	4,4	81,451	8566	901	—	—
4	4,5	90,017	9467	—	—	—
5	4,6	99,484	—	—	—	—

3) Составим таблицу для подсчета значения $e^{4,53}$ по схеме таблицы 10, получим $e^{4,53} = 92{,}958$.

Пример к заданию 2. Провести подготовительную работу для составления таблицы функции $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ на отрезке $[1;\ 2]$ с точностью до трех десятичных знаков, т. е. $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$.

1) Найдем вторую производную функцию $y = f(x)$ и M_2, такое, что $|f''(x)| \leqslant M_2$ на $[1;\ 2]$:

$$f''(x) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}},$$

$$|f''(x)| \leqslant \frac{2}{\sqrt{(1^2+1)^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 0{,}72,$$

значит, можно взять $M_2 = 0{,}72$.

2) Выберем шаг таким образом, чтобы полученная таблица допускала линейное интерполирование. Для этого потребуем, чтобы шаг h удовлетворял неравенству (5.27):

$$h^2 \leqslant \frac{8\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}}{0{,}72} < 56\cdot 10^{-4}.$$

Поэтому можно принять $h = 0{,}05$.

3) В расчетном бланке должны быть предусмотрены промежуточные результаты x^2+1, $\sqrt{x^2+1}$, $x+\sqrt{x^2+1}$ и окончательный $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

Так как для десятичных логарифмов существуют более точные таблицы, то мы пользуемся десятичными логарифмами; будем выражать натуральные логарифмы через десятичные равенством $\ln u = \frac{1}{M}\lg u$, где $M = \lg e = 0{,}43429\ \dots$, $\frac{1}{M} = 2{,}3026\dots$

В нашем случае

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{M}\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Расчетный бланк для составления таблицы имеет вид.

x	x^2+1	$\sqrt{x^2+1}$	$x+\sqrt{x^2+1}$	$\lg(4)$	$y=\frac{1}{M}(5)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1,00	2,0000	1,4142	2,4142	0,38278	0,881
1,05	2,1025	1,4500	2,5000	0,39794	0,916
1,10	2,2100	1,4866	2,5866	0,41273	0,950
1,15	2,3225	1,5240	2,6740	0,42716	0,984
. .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
. .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
2,00					

Применяя правила приближенных вычислений, устанавливаем точность промежуточных результатов. x, x^2, x^2+1 следует считать точными числами. $\sqrt{x^2+1}$ и $x+\sqrt{x^2+1}$ будем брать с четырьмя десятичными знаками, $\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ — с пятью десятичными знаками.

Для нахождения x^2 и $\sqrt{x^2+1}$ с четырьмя десятичными знаками можно воспользоваться [7], причем придется применить линейное интерполирование. $\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ найдем по таблицам.

З а м е ч а н и е. Можно было искать сразу $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ по таблицам [7] (или [6]), но тогда пришлось бы применять интерполирование на 2 последние цифры.

4) Вычислим несколько первых значений функции.

ГЛАВА 6

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

§ 41. Постановка задачи о наилучшем приближении

Задача интерполирования, рассмотренная нами, ставилась следующим образом. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$ и нам известны значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ этого отрезка. Мы ставили задачу отыскания функции $\varphi(x)$ определенного вида (например, многочлена), которая в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точно совпадает с данной функцией. Видоизменим постановку задачи следующим образом. Найти функцию $\varphi(x)$ данного вида, которая в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимает значения, возможно близкие к значениям $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Обозначим значения функции $\varphi(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ через $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ (они нам неизвестны, так как сама функция $\varphi(x)$ пока не найдена). Что значит «значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ близки к значениям $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$?» Совокупности чисел $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$ суть точки n-мерного пространства, обозначим их η, $\bar{\eta}$. Значит, наш вопрос можно более точно сформулировать таким образом: найти функцию данного вида так, чтобы расстояние между точками η и $\bar{\eta}$ было наименьшим. Расстояние между точками n-мерного пространства можно понимать в смысле той или иной метрики. Будем пользоваться метрикой n-мерного евклидова пространства. Значит, будем требовать, чтобы величина

$$\sqrt{(\bar{y}_1 - y_1)^2 + (\bar{y}_2 - y_2)^2 + \ldots + (\bar{y}_n - y_n)^2}$$

была наименьшей. Но это равносильно тому, что величина

$$(\bar{y}_1 - y_1)^2 + (\bar{y}_2 - y_2)^2 + \ldots + (\bar{y}_n - y_n)^2 \qquad (6.1)$$

является наименьшей. Итак, можно теперь нашу задачу сформулировать так: *Найти функцию $\varphi(x)$ данного вида при условии, чтобы величина (6.1), «сумма квадратов разностей значений функций в узловых точках», была наименьшей.* Это уже не задача интерполирования, а задача отыскания приближенного выражения данной функции по иному принципу. Мы имеем новую задачу — *задачу приближения функции по методу наименьших квадратов.*

Если функция $\varphi(x)$ есть приближенное выражение функции $f(x)$, то $\varphi(x)$ называют приближающей функцией. Интерполирование есть один из методов отыскания приближающей функции, теперь мы имеем другой метод. Процесс отыскания приближающей функции называется приближением функции $f(x)$ посредством функции $\varphi(x)$.

Сравним новый метод приближения с тем, который был рассмотрен прежде, т. е. с интерполированием. Прежний метод был основан на том, что приближающая (интерполирующая) функция $\varphi(x)$ в узлах точно совпадает с данной функцией, а в других точках она является приближенным выражением. Новый метод не требует точного совпадения функций в узлах, поэтому он является более гибким. Существо многих задач, в которых отыскивают приближение функции, не требует, чтобы узлы были какими-то исключительными точками, чтобы в них требовать полного совпадения значений данной и приближающей функций.

§ 42. Общие принципы отыскания приближающей функции

Для осуществления процесса приближения по методу наименьших квадратов мы прежде всего должны установить вид приближающей функции $\varphi(x)$. Нужно определить, будет ли это многочлен, или показательная функция, или степенная функция и т. д. Установив вид приближающей функции, мы должны уточнить, какие параметры должны входить в выражение этой функции. Например, если $\varphi(x)$ есть многочлен, то какой степени. Если это будет многочлен, скажем, третьей степени, то параметрами будут его коэффициенты, число которых — четыре:

$$\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Если в качестве приближающей функции мы решили взять показательную функцию, то ее можно записать так:

$$\varphi(x) = ce^{ax}$$

Значит, функция будет зависеть от двух параметров a и c.

В качестве приближающих функций применяют такие функции:

$$y = cx^a, \quad y = bx^a + c, \quad y = \frac{1}{ax+b}, \quad y = \frac{x}{ax+b},$$

$$y = \frac{1}{ax^2+bx+c} \text{ и т. д.}$$

Если установлен вид приближающей функции $\varphi(x)$, установлены параметры, то мы можем записать эту функцию символически так:

$$\varphi(x, a), \quad \varphi(x, a, b), \quad \varphi(x, a, b, c)$$

и т. д. в соответствии с тем, зависит ли она от одного, двух, трех и т. д. параметров.

Для окончательного установления приближающей функции остается найти численные значения параметров. Это и делается, исходя из основного принципа, состоящего в том, что выражение (6.1) должно быть наименьшим.

Обратим внимание на следующее. Применяя метод интерполирования, мы находим параметры из *уравнений*, выражающих тот факт, что в узлах значения интерполирующей функции *равны* известным значениям данной функции.

Чтобы число уравнений было равно числу неизвестных, мы требуем, чтобы число параметров было равно числу узлов. Применение метода наименьших квадратов, однако, не требует, чтобы число параметров было равно числу узлов. Наоборот, необходимо, чтобы число узлов было больше числа параметров. Мы можем увеличивать точность приближения, увеличивая число узлов без увеличения числа параметров. Поэтому число узлов лучше брать значительно больше числа параметров.

Изложим общий метод отыскания параметров приближающей функции, полагая для простоты записей число параметров равным трем.

Итак, пусть приближающая функция будет $\varphi(x, a, b, c)$ Вид функции известен, нужно найти численные значения параметров. Узловые точки будут $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Вычислим значения приближающей функции в узловых точках (найденные значения не будут числами, они будут зависеть от a, b, c):

$$\overline{y}_i = \varphi(x_i, a, b, c) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Теперь составим выражение (6.1). Это будет некоторая функция величин a, b, c:

$$F(a, b\ c) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c)]^2. \tag{6.2}$$

Мы хотим найти a, b, c так, чтобы функция $F(a, b, c)$ принимала наименьшее значение. Мы знаем, что функция трех переменных может принимать наименьшее значение в некоторой области или внутри этой области, или на границе. Если наименьшее значение достигается в точке внутри области, то эта точка есть точка минимума. В нашем случае функция $F(a, b, c)$ принимает наименьшее значение внутри некоторой области. Значит, в соответствующей точке, обозначим ее (a_0, b_0, c_0), функция имеет минимум. Следовательно, выполняется необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 0. \tag{6.3}$$

Учитывая (6.2), это условие можно записать так:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)_{x=x_i} = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right)_{x=x_i} = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right)_{x=x_i} = 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Мы получим три уравнения с тремя неизвестными. Решая эту систему, мы найдем нужные значения a_0, b_0, c_0. (В случае одного параметра нужно взять одно первое уравнение из (6.4), в случае двух — два первых уравнения. Ясно, как записать систему для случая любого числа параметров.) Теперь мы можем окончательно записать искомую функцию $y = \varphi(x, a_0, b_0, c_0)$.

§ 43. Нахождение приближения по способу наименьших квадратов в виде многочлена

Пусть мы ищем приближающую функцию в виде многочлена первой степени:

$$y = ax + b. \tag{6. 5}$$

Здесь два параметра a и b. Запишем для функции уравнение типа (6.4); учтем при этом, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 1.$$

Получим систему:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [y_i - ax_i - b]\, x_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - ax_i - b] \quad = 0; \end{aligned} \tag{6. 6}$$

преобразуем ее так:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b \sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i - n\, b = 0. \end{aligned} \tag{6. 7}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} &M_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \;\; M_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \;, \\ &M_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \;\; M_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \end{aligned} \tag{6. 8}$$

Тогда система может быть записана следующим образом (a и b — неизвестные):

$$M_{xx}\, a + M_x\, b = M_{xy}, \quad M_x\, a + b = M_y. \tag{6. 9}$$

Найдя a и b, мы получим окончательное выражение искомой функции $y = ax + b$.

Если мы ищем функцию в виде многочлена второй степени

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c, \qquad (6.10)$$

то a, b, c найдем из системы (6. 4), которая будет иметь вид (мы учитываем, что $\frac{\partial \varphi}{\partial a} = x^2$, $\frac{\partial \varphi}{\partial b} = x$, $\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 1$):

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [y_i - a x_i^2 - b x_i - c] x_i^2 = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - a x_i^2 - b x_i - c] x_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - a x_i^2 - b x_i - c] = 0. \end{aligned} \qquad (6.11)$$

После простых преобразований (проделайте их) система запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &M_{x^4} a + M_{x^3} b + M_{xx} c = M_{x^2 y}, \\ &M_{x^3} a + M_{xx} b + M_x c = M_{xy}, \\ &M_{xx} a + M_x b + c = M_y, \end{aligned} \qquad (6.12)$$

где

$$M_{x^4} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^4, \quad M_{x^3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^3, \quad M_{x^2 y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \qquad (6.13)$$

Найдя a, b, c из системы (6.12), получим искомую функцию.

Пример 1. Известны значения функции $f(x)$ в некоторых точках, представленных в таблице.

x	0	1	2	4	6	7	9	10
y	6	7,4	9,3	11,9	15,2	16,6	19,4	21,1

Будем искать приближенное выражение функции по способу наименьших квадратов в виде линейной функции $y = ax + b$.

Для нахождения a и b найдем M_x, M_y, M_{xx}, M_{xy}:

$$M_x = \frac{1}{8}[0 + 1 + 2 + 4 + 6 + 7 + 9 + 10] = 4,875,$$

$$M_y = \frac{1}{8}[6 + 7,4 + 9,3 + 11,9 + 15,2 + 16,6 + 19,4 + 21,1] = 13,338,$$

$$M_{xx} = \frac{1}{8}[0 + 1 + 4 + 16 + 36 + 49 + 81 + 100] = 35,875,$$

$$M_{xy} = \frac{1}{8}[7,4 + 18,6 + 47,6 + 91,2 + 116,2 + 174,6 + 211] = 83,332.$$

Система вида (6. 9) будет такова:

$$\begin{aligned} 35,875a + 4,875b &= 83,332, \\ 4,875a + b &= 13,338. \end{aligned}$$

Найдя решения системы, получим: $a = 1,507$, $b = 5,991$, т. е. искомая функция будет

$$y = 1,507x + 5,991.$$

Для контроля найдем значение полученной функции в узловых точках. Запишем их в виде таблицы.

x	0	1	2	4	6	7	9	10
y	5,991	7,498	9,005	12,014	15,033	16,540	19,544	21,061

Пример 2. Функция задана таблицей

x	0	2	4	5	8	10	12	15
y	29,8	22,9	17,1	15,1	10,7	10,1	10,6	15,2

Будем искать приближающую функцию в виде многочлена второй степени

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c.$$

Выполняя вычисления, находим:

$$\begin{array}{ll} M_x = 7,000 & M_y = 16,438 \\ M_{xx} = 72,250 & M_{xy} = 91,438 \\ M_{x^3} = 851,5 & M_{x^2y} = 923,0 \\ M_{x^4} = 10794,25 & \end{array}$$

Параметры a, b, c находим, решая систему вида (6.12), коэффициенты которой уже найдены.

Получаем: $a = 0{,}175$, $b = -3{,}618$, $c = 29{,}276$.

Итак, мы получили такое приближенное выражение данной функции: $f(x) \approx 0{,}175x^2 - 3{,}618x + 29{,}276$.

§ 44. Нахождение приближения по способу наименьших квадратов в виде показательной или степенной функции

Пусть данная функция $f(x)$ положительна и определена для положительных значений x и пусть мы ищем приближение в виде степенной функции.

$$\varphi(x) = cx^{\alpha} \quad (c > 0). \tag{6.14}$$

Здесь два параметра c и α. Сначала прологарифмируем равенство (6.14):

$$\lg \varphi(x) = \lg c + \alpha \lg x. \tag{6.15}$$

Естественно, что новая искомая функция $\lg \varphi(x)$ будет приближением для функции $\lg f(x)$. Обозначим $\alpha = A$, $\lg c = B$, $\lg x = \xi$, $\lg \varphi(x) = \varphi_1(\xi)$. Равенство (6.15) примет вид:

$$\varphi_1(\xi) = A\xi + B \tag{6.16}$$

Мы получили задачу о приближении с помощью линейной функции. Применим метод наименьших квадратов не к функции $\varphi(x)$, а к функции $\varphi_1(\xi)$. Найдем A и B, а затем α и c. Возвращаясь к прежним переменным, мы получим выражение искомой функции в виде (6.14).

Пусть данная функция положительна, и мы ищем ее приближение в виде показательной функции

$$\varphi(x) = ce^{kx} \qquad (c > 0). \tag{6.17}$$

Прологарифмируем равенство (6.17), получим:

$$\lg \varphi(x) = \lg c + k \lg e \cdot x.$$

Обозначая $k \lg e = A$, $\lg c = B$, получим линейную функцию

$$\varphi_1(x) = Ax + B.$$

Найдем коэффициенты A и B по методу наименьших квадратов, затем найдем k и c, получим искомую функцию ce^{kx}.

ГЛАВА 7
СОСТАВЛЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

§ 45. Применение метода наименьших квадратов к составлению эмпирических формул

Пусть мы изучаем некоторое явление или некоторый процесс, и при этом нам нужно установить зависимость между двумя величинами, обозначим их x и y. Пусть y есть функция величины x. Может случиться, что зависимость между x и y выражается формулой, которая выведена теоретически. Однако в эту формулу входят параметры, которые нужно определить опытным путем. Но во многих случаях такой формулы нет, и мы ставим своей задачей на основании измерений в процессе опыта получить формулу. Полученная таким образом формула называется эмпирической формулой. Существует много эмпирических формул, они находят широкое применение на практике. Приведем несколько примеров.

Формула линейного расширения тела при нагревании:

$$l = l_0 (1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3),$$

где α, β, γ — коэффициенты, зависящие от вещества, t — температура тела.

Формула Ричардсона, определяющая величину тока насыщения в электронной лампе в зависимости от температуры катода:

$$J_K = AT^2 e^{-BT},$$

где T — абсолютная температура, A и B — константы, зависящие от геометрии катода и вещества.

Формула Вилларда — зависимости скорости звука в дистиллированной воде от температуры:

$$c = 1557 - 0{,}0245\,(74 - t)^2.$$

Рассмотрим две задачи, близкие по методу решения.

П е р в а я з а д а ч а. Известна формула, выведенная теоретически, выражающая зависимость одной величины от другой, например y от x. Формула содержит параметры. Ставится задача о нахождении численных значений параметров. Во многих случаях численные значения параметров можно найти только опытным путем. На основании измерений получаем таблицу значений функции и по методу наименьших квадратов находим параметры.

В т о р а я з а д а ч а. Нет формулы зависимости y от x, выведенной теоретически. Мы имеем только таблицу значений функции, полученную в результате измерения. Требуется прежде всего сделать обоснованное предположение о том, какая формула пригодна для того, чтобы приближенно выразить данную зависимость. Эта формула будет содержать параметры. Мы приходим, таким образом, к первой задаче: дана функция, зависящая от нескольких параметров. Найти параметры по методу наименьших квадратов. В результате мы получим эмпирическую формулу, выражающую нужную зависимость.

Мы рассмотрим подробно вторую задачу, т. е. задачу отыскания эмпирических формул. Очевидно, владея методом решения второй задачи, мы можем решать и первую.

t	0°	4°	10°	15°	21°	29°	36°	51°	68°
s	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

(7. 1)

Пусть, например, изучается растворимость s азотнонатриевой соли в зависимости от температуры t. Ставится эксперимент, производятся измерения. Полученные данные записываются в таблицу. Но нам недостаточно таблицы, мы хотим получить выражение этой зависимости в виде формулы, хотя бы приближенно.

В общем виде задача ставится следующим образом. В результате эксперимента мы получаем (путем измерений) значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ величины y, соответствующие значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ величины x. Результаты мы запишем в таблицу.

Таблица 13

x	x_1	x_2	x_3	. . . .	x_n
y	y_1	y_2	y_3	. . . .	y_n

Эти табличные данные можно изобразить геометрически, мы получим точечный график (рис. 16 и 17). Нам нужно подобрать более или менее простую формулу, выражающую приближенно зависимость y от x. Конечно, существует «точная» функция $y = f(x)$, но так как она нам неизвестна, то нужно подобрать функцию $y = \varphi(x)$, близкую к $f(x)$.

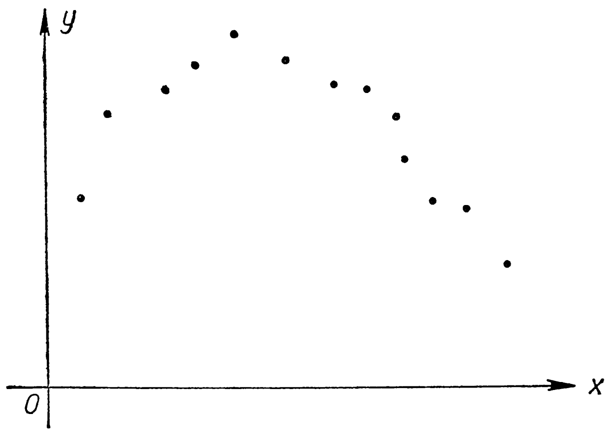

Рис. 16

Казалось бы, самый естественный путь — это отыскание интерполирующей функции, например, отыскание многочлена $g(x)$, принимающего в точках $x_1, x_2, .., x_n$ значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Однако этот способ имеет существенные недостатки. Допустим, что зависимость между x и y на самом деле выражается простой гладкой кривой (рис. 18 — пунктирная линия). Но вследствие неизбежных случайных ошибок измерения значения, найденные экспериментально, несколько уклоняются в ту или другую сторону. Будем искать многочлен n-й степени, график которого проходит через соответствующие точки. Если многочлен будет доста-

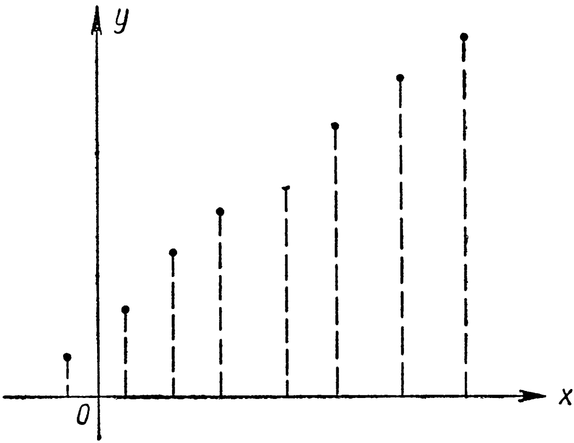

Рис. 17

точно высокой степени, то его график может оказаться чрезмерно извилистой линией (рис. 18 — толстая линия), не выражающей ход изменения функции. В то же время нет необходимости требовать, чтобы кривая действительно проходила через все эти точки, ибо сами точки получены с погрешностями, неизбежными при измерениях.

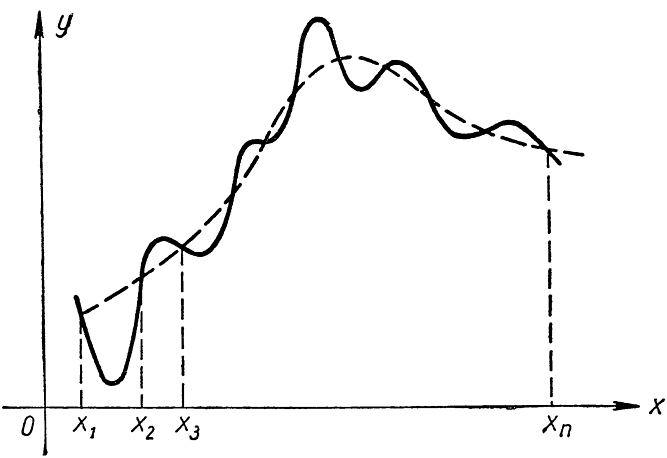

Рис. 18

Поэтому поставим вопрос так. Рассмотрим точечный график, построенный на основе значений функции, данных в таблице. Подметив особенности расположения точек, подбираем тип более или менее простой аналитически выраженной функции, соответствующей этому расположению точек. Записываем выбранную функцию с параметрами, причем стремимся к тому, чтобы число параметров было невелико. Подберем параметры так, чтобы точки, полученные экспериментально, были возможно ближе к кривой

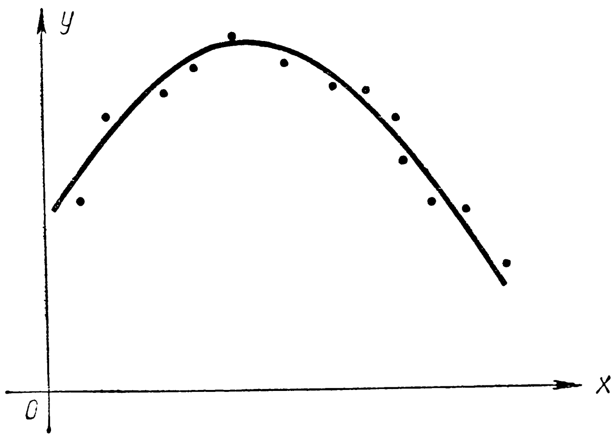

Рис. 19

(но не обязательно должны лежать на кривой). Отыскание параметров обычно делается по способу наименьших квадратов.

Итак, мы получили прием составления эмпирических формул по способу наименьших квадратов.

При подборе вида приближающей функции из рассмотрения графика следует учесть следующее. Рассматривая точки на чертеже, мы намечаем плавную линию, проходящую вблизи этих точек. При этом мы не должны стремиться к тому, чтобы линия проходила через эти точки. Ведь случайные отклонения при измерении бывают в ту и другую сторону. Поэтому плавную кривую нужно проводить так, чтобы наши точки располагались по обе стороны от кривой. Вид проведенной линии позволяет нам делать

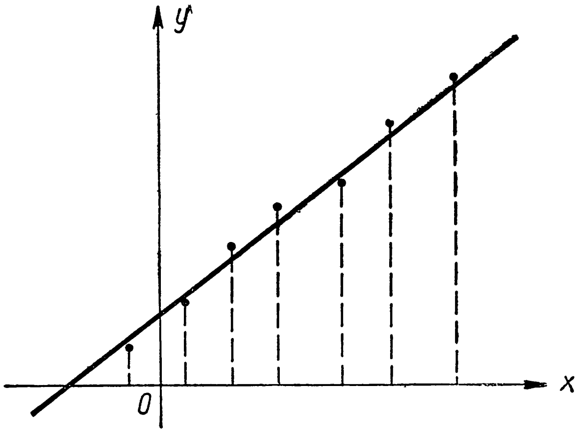

Рис. 20

заключение, какая же аналитически заданная функция подходит в качестве приближения. Например, расположение точек на рисунке 17 таково, что за график искомой функции можно взять прямую, значит, эта функция — линейная, $\varphi(x) = ax + b$. Расположение точек на рисунке 16 позволяет принять за приближенную функцию квадратный трехчлен $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$. Проведя на рисунках 16 и 17 надлежащим образом плавные линии, мы получим в первом случае параболу, во втором — прямую (рис. 19 и 20).

§ 46. Примеры и упражнения

1) Рассмотрим приведенный в § 45 пример изучения растворимости соли. Нам нужно получить эмпирическую формулу зависимости растворимости s от температуры t. Берем таблицу (7.1) и наносим на чертеже соответствующие точки (рис. 17). Наблюдая расположение точек, видим, что точки близки к некоторой прямой. Стало быть, ставим задачу о нахождении приближенного выражения величины s в виде линейной функции: $s = at + b$. Находим коэффициенты a и b по способу наименьших квадратов. Для этого вычисляем: $M_x = 26{,}00$, $M_y = 90{,}14$, $M_{xx} = 1127{,}11$, $M_{xy} = 2736{,}5$. Решаем систему:

$$\begin{gathered} 1127{,}11a + 26b = 2736{,}5, \\ 26a + b = 90{,}14, \end{gathered}$$

и находим a и b: $a = 0{,}87$, $b = 67{,}5$.

Итак, искомая функция

$$s = 0{,}87t + 67{,}5.$$

2) При исследовании влияния температуры на ход хронометра ω получены следующие результаты, приведенные в таблице.

$t°$ C	5,0	9,6	16,0	19,6	24,4	29,8	34,4
ω	2,60	2,01	1,34	1,08	0,94	1,06	1,25

Нанеся на чертеже соответствующие точки, замечаем, что за приближенную кривую можно принять квадратичную параболу с осью, параллельной оси OY (сделайте чертеж и проверьте это сами). Приближенная формула будет:

$$\varphi(t) = At^2 + Bt + C.$$

Пусть нас интересуют не сами значения температуры в обычной шкале, а отклонение температуры от 15°. Значит, за аргумент удобно взять не t, а $t - 15$. Поэтому можно будет записать искомую функцию так:

$$\varphi(t) = A_1(t - 15)^2 + B_1(t - 15) + C_1.$$

Во избежание вычисления больших значений вводим новую переменную

$$x = \frac{t - 15}{15}.$$

Тогда функцию запишем так:

$$\varphi_1(x) = ax^2 + bx + c.$$

Таблица значений будет выглядеть таким образом.

x	—0,667	—0,360	0,067	0,307	0,627	0,987	1,293
ω	2,60	2,01	1,34	1,08	0,94	1,06	1,25

Вычислим M_x, M_y, M_{xx}, M_{xy}, M_{x^3y}, M_{x^2y}, M_{x^4}.
Для этого составляем таблицу (значения ω обозначены y_i).

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	−0,667	0,4449	−0,2967	0,1979	2,60	−1,7342	1,1567
2	−0,360	0,1296	−0,0467	0,0168	2,01	−0,7236	0,2605
3	0,067	0,0045	0,0003	0,0000	1,34	0,0898	0,0060
4	0,307	0,0942	0,0289	0,0089	1,08	0,3316	0,1017
5	0,627	0,3931	0,2465	0,1545	0,94	0,5894	0,3695
6	0,987	0,9742	0,9615	0,9490	1,06	1,0462	1,0327
7	1,293	1,6718	2,1617	2,7951	1,25	1,6162	2,0898
Σ							
	$M_x =$ $=0,3220$	$M_{x^2}=$ $=0,5303$	$M_{x^3} =$ $=0,4365$	$M_{x^4} =$ $0,5889$	$M_y =$ $1,4686$	$M_{xy} =$ $0,1736$	$M_{x^2 y} =$ $0,7167$

Для отыскания a, b, c получаем систему типа (6.12):

$$\begin{aligned} 0,5889a + 0,4365b + 0,5303c &= 0,7167, \\ 0,4365a + 0,5303b + 0,3220c &= 0,1736, \\ 0,5303a + 0,3220b + c &= 1,4686. \end{aligned}$$

Решая систему, находим: $a = 0,874$, $b = -1,24$, $c = 1,404$. Возвращаясь к аргументу t, получим такое выражение функции:

$$\omega = 0,00388(t-15)^2 - 0,0831(t - 15) + 1,4042.$$

3) Конденсатор заряжен до некоторого напряжения U_0, после чего он разряжается. Напряжение U измеряется в различные моменты времени. Результаты измерений приведены в таблице. Известно, что зависимость U от времени t имеет вид:

$$U = U_0 e^{-kt}. \qquad (7.2)$$

Требуется подобрать значение параметров по методу наименьших квадратов.

$t_{сек}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_0	100	75	55	40	30	20	15	10	10	5	5

Прологарифмируем (7.2) при помощи натурального логарифма

$$\ln U = \ln U_0 - kt,$$

обозначим $\ln U = y$, $\ln U_0 = b$, $-k = a$.

Получаем функцию

$$y = at + b.$$

Находим параметры a и b по методу наименьших квадратов.

Вычисляем M_x, M_y, M_{x^2}, M_{xy} и для отыскания a и b получаем систему типа (6.9), которая при вычисленных значениях M_x, M_y, M_{x^2}, M_{xy} имеет вид:

$$\begin{aligned} 35a + 5b &= 12{,}12, \\ 6a + b &= 3{,}05. \end{aligned}$$

Решая систему, находим: $a = -0{,}313$, $b = 4{,}63$, отсюда $k = 0{,}313$, $U_0 = e^{463} = 102{,}5$. Итак, закон разрядки конденсатора выражается формулой

$$U = 102{,}5\, e^{-0{,}313\, t},$$

Упражнения. Приведены результаты измерений физических величин. В каждом случае указано, каков вид функции, приближенно выражающей зависимости между величинами. Построить точечный график зависимости и убедиться в том, что расположение точек соответствует указанному предположению о виде функции. Пользуясь данными таблицы, найти параметры по методу наименьших квадратов.

1) d — отклонение стрелки гальванометра (в миллиметрах), I — сила тока в микроамперах ($y = ax + b$).

d	29	48	73	92	118	140	165	200
I	0,0493	0,0821	0,1230	0,154	0,197	0,234	0,274	0,328

2) Соотношение между давлением и объемом насыщенного пара: v — удельный объем в $м^3$ на 1 *кг*, p — давление в *кг* на 1 $см^2$ ($y = cx^{\alpha}$).

v	1,650	1,398	1,191	1,026	0,8764	0,7566	0,6561	0,6710	0,4991
p	1,034	1,232	1,432	1,726	2,027	2,370	2,760	3,198	3,693

3) Барометрическое давление: зависимость давления p (в *мм рт. ст.*) от высоты h над уровнем моря (в *м*) $y = Ce^{kx}$.

h	0	270	840	1452	2116	3206
p	760	737	686	635	584	508

§ 47. Логарифмическая и полулогарифмическая сетка

Многие задачи могут быть решены графически при помощи бумаги, разлинованной специальным образом, которая называется *логарифмической* или *полулогарифмической*. Линии на этой бумаге образуют неравномерную сетку, которая называется логарифмической или полулогарифмической сеткой.

На плоскости установим прямоугольную систему координат и выберем масштаб. Обычно на листах, имеющихся в продаже (издается фабрикой технических бумаг «Союз»), за единицу масштаба принят 1 *дм*. Тогда каждая точка плоскости будет иметь координаты, которые обозначим ξ, η. Значит, каждая точка плоскости будет характеризоваться двумя числами.

Пусть даны два положительных числа x и y. Введем обозначения $\xi = \lg x$, $\eta = \lg y$.

В декартовой системе координат числа ξ и η можно рассматривать как координаты точки P. Точка P характеризуется двумя числами ξ и η (своими декартовыми координатами), но она же характеризуется двумя другими числами x, y. Числа x, y тоже характеризуют точку P, они также определяют ее положение на плоскости, но они уже имеют иной смысл, чем декартовы координаты ξ, η. Мы будем называть x, y логарифмическими координатами точки P. Будем считать в дальнейшем x, y основными координатами любой точки, будем помечать каждую точку этими координатами. Декартовы же координаты ξ и η будут для нас вспомогательными. Они лишь будут помогать правильно строить точки с данными логарифмическими координатами.

Нанесем на ось OX логарифмическую шкалу, сделаем на ней соответствующие пометки и через отмеченные точки проведем прямые, параллельные оси OY. (Следует повторить понятие функциональной шкалы и, в частности, понятие логарифмической шкалы.) Подробно этот процесс можно описать следующим образом.

Будем давать переменной x целые значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и проводить на плоскости линии $x = 1$, $x = 2$, ..., $x = 10$. Эти линии суть прямые, которые в обычных декартовых координатах будут иметь уравнения:

$$\xi = \lg 1 = 0,\ \xi = \lg 2,\ \ldots,\ \xi = \lg 10 = 1.$$

Каждую такую прямую мы пометим значением x ($x = 1$, $x = 2$ и т. д.). Последняя из этих прямых будет иметь уравнение $\xi = 1$ и, значит, будет находиться на расстоянии 10 *см* от оси координат, т. е. эти прямые будут находиться в полосе $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Далее будем давать x значения 20, 30, 40, ..., 100 и проведем линии

$$\xi = \lg 20, \quad \xi = \lg 30, \quad \ldots, \quad \xi = \lg 100 = 2.$$

Эти линии заполнят промежуток $1 \leqslant \xi \leqslant 2$. По свойствам десятичных логарифмов они получатся из первой серии линий простым сдвигом вправо на одну единицу. Пометим эти линии значениями x, т. е. 20, 30, 40, ..., 100. На фабричной бумаге они помечены числами 2, 3, 4, ..., 10, как и линии первой серии. Это не приведет к недоразумениям, так как каждому знакомому с логарифмами ясно, что это означает: раз эти линии лежат внутри второго единичного промежутка, то нужно приписать справа нуль. В третьем единичном промежутке лежат линии

$$\xi = \lg 200, \quad \xi = \lg 300, \quad \ldots, \quad \xi \lg = 1000 = 3.$$

Они получаются из первой серии сдвигом вправо на 2 единицы. Эти линии помечены числами 200, 300, ..., 1000. Пометки на фабричной бумаге 2, 3, ..., 10. Нужно помнить, что раз эти линии в третьем единичном промежутке, то нужно приписывать справа два нуля. Это построение можно продолжать неограниченно. Построенные линии разделят всю ось абсцисс на промежутки (неодинаковой длины). Назовем такие промежутки интервалами первого ранга. Каждый из этих промежутков разделим на 10 частей (не равных между собой по длине), соответствующих таким значениям x: в первом единичном промежутке с шагом 0,1, во втором — с шагом 1, в третьем — с шагом 10. Назовем такие промежутки интервалами второго ранга. Проведем через точки деления прямые, параллельные оси ординат. Эти прямые помечены соответствующими значениями x.

Мысленно можно каждый промежуток второго ранга разделить также на 10 частей с шагом, в 10 раз меньшим по тому же принципу построения логарифмической шкалы, и провести через точки деления прямые, параллельные оси координат. Однако технически это сделать на листе бумаги уже невозможно. Но расположение любой такой линии можно себе представить и приблизительно указать ее на бумаге.

Таким образом, мы получаем на бумаге логарифмическую шкалу на оси абсцисс и три серии прямых, параллельных оси ординат: первая серия (на бумаге эта серия изображена жирными линиями) состоит из всевозможных линий, помеченных значениями x с одной значащей цифрой (не считая нулей справа). Вторая серия — это линии, помеченные двумя значащими цифрами. Третья серия — тремя значащими цифрами (линии этой серии не изображены на бумаге, но их положение мы определить приблизительно можем) (см. рис. 21).

Подобным образом мы строим систему прямых, параллельных оси абсцисс, положение которых определим по принципу логарифмической шкалы. Эти линии отмечены значениями y. Итак, на плоскости (на чертеже) нанесена сеть прямых (координатных линий), состоящая из системы прямых, параллельных оси ординат, и из системы прямых, параллельных оси абсцисс. Такая сеть координатных линий называется логарифмической сеткой, а бумага с нанесенной на ней сеткой такого типа — логарифмической бумагой.

Для точки плоскости мы можем найти, пользуясь логарифмической бумагой, логарифмические координаты этой точки x и y точно с двумя верными значащими цифрами (не считая нулей справа) и приблизительно с тремя значащими цифрами. На логарифмической бумаге, у которой за масштабную единицу взято 25 *см*, т. е. с делениями равными делениям обыкновенной счетной логарифмической линейке, координаты x и y можно определить точно с тремя верными значащими цифрами.

Лист логарифмической бумаги изображен на рисунке 21.

Теперь рассмотрим устройство полулогарифмической сетки.

Пусть даны числа x, y, $y > 0$. Этой паре чисел приведем в соответствие точку $\xi = x$, $\eta = \lg y$ на координатной плоскости. Таким образом, каждая точка P плоскости может характеризоваться или парой чисел (ξ, η), или парой чисел (x, y). Числа x, y будем называть полулогарифмическими координатами точки. Эти координаты будем считать основными, ими будем помечать на чертеже точки плоскости.

Построим на чертеже координатную сетку таким образом. На оси абсцисс построим равномерную шкалу в изб-

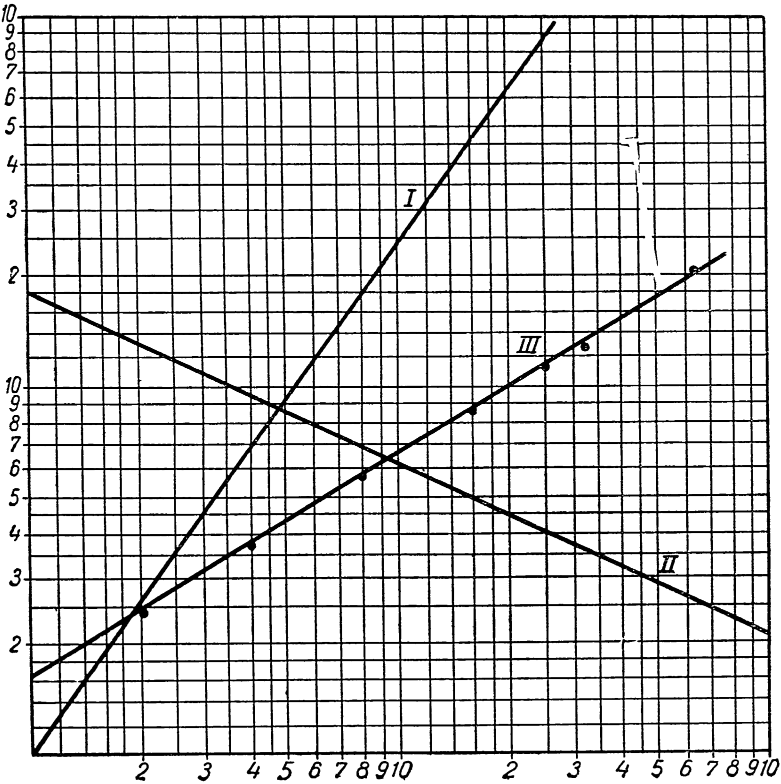

Рис. 21

ранном масштабе и через точки деления проведем прямые, параллельные оси ординат. На оси ординат построим логарифмическую шкалу такую же точно, как в случае логарифмической сетки, и через точки деления проведем прямые, параллельные оси абсцисс. Мы получим полулогарифмическую координатную сетку. При помощи этой сетки мы можем определить полулогарифмические координаты точки точно с двумя верными значащими цифрами (не считая нулей справа) и приблизительно с тремя значащими цифрами. Лист полулогарифмической бумаги изображен на рисунке 22.

При помощи логарифмической и полулогарифмической бумаги можно решать графически много задач. В частности, полезно учащимся IX—X классов средней школы ознакомиться с бумагой этих типов и указать на возможность решать ряд задач.

§ 48. Графики степенной и показательной функций на логарифмической и полулогарифмической сетке

На логарифмической и полулогарифмической бумаге очень просто выглядят графики степенной и показательной функций.

Рассмотрим степенную функцию

$$y = cx^{\alpha}. \tag{7.3}$$

В технической практике часто встречается степенная функция с дробным показателем (например, $\alpha = 1{,}37$). Построить график такой функции обычным способом довольно сложно. Прологарифмируем равенство (7.3):

$$\lg y = \lg c + \alpha \lg x.$$

Будем рассматривать x и y как логарифмические координаты. Полагая $\xi = \lg x$, $\eta = \lg y$, $b = \lg c$, получим:

$$\eta = \alpha\xi + b. \tag{7.4}$$

Так как ξ, η — декартовы координаты, то (7.4) есть уравнение прямой, которую мы построим на логарифмической бумаге. При этом α есть угловой коэффициент прямой, b — отрезок, отсекаемый на оси ординат. Заметим, что $b = \lg c$, значит, точка пересечения прямой с осью ординат имеет пометку c (ведь пометки на логарифмической бумаге — в логарифмических координатах). Итак, если вести речь только о логарифмических координатах, помеченных на сетке, то можно сказать: график степенной функции (7.3) есть прямая, угловой коэффициент которой равен показателю степени α, а точка пересечения с осью OY имеет ординату, равную c.

Теперь рассмотрим показательную функцию

$$y = ce^{kx} \tag{7.5}$$

Прологарифмируем

$$\lg y = \lg c + k \lg e \cdot x.$$

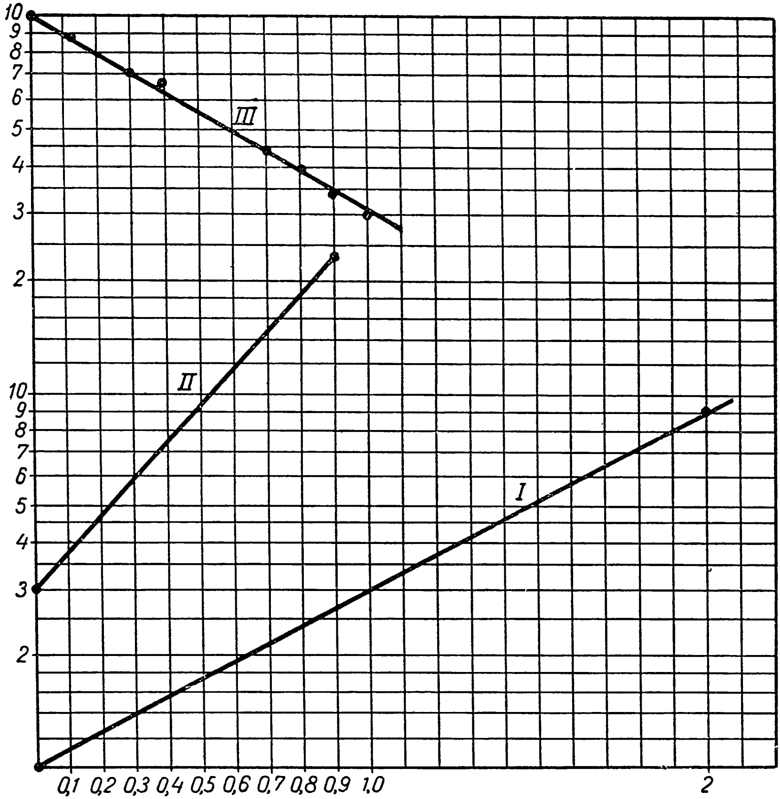

Рис. 22

Будем рассматривать x и y как полулогарифмические координаты и построим график функции на полулогарифмической бумаге. Полагая $\xi = x$, $\eta = \lg y$, $b = \lg c$, $k \lg e = k_0$, получим:

$$\eta = k_0 \xi + b. \tag{7.6}$$

Стало быть, график показательной функции есть прямая, угловой коэффициент которой равен $k \lg e$ ($= 0{,}4343\ k$), а точка пересечения с осью OY имеет ординату, равную c.

Замечание. Если показательную функцию записать в виде

$$y = c \cdot 10^{kx}. \tag{7.5'}$$

то угловой коэффициент графика будет равен точно k.

На рисунке 21 изображены графики степенной функции на логарифмической бумаге. Первый график есть график функции $y = x^{1,37}$ (проверьте). Пользуясь им, найдите значение $2,73^{1,37}$; $1,24^{1,37}$. Установите самостоятельно, графиком какой функции является прямая (II).

На рисунке 22 изображены графики показательной функции. Первый график есть график функции $y = 3^x$ (проверьте это). Пользуясь им, найдите $3^{2,4}$. Установите самостоятельно, графиком какой функции является прямая (II).

§ 49. Составление эмпирических формул при помощи логарифмической и полулогарифмической сетки

Во многих случаях формулы, выражающие зависимость между величинами, целесообразно искать в виде показательной или степенной функции. В таких случаях для отыскания параметров можно пользоваться логарифмической или полулогарифмической бумагой, что широко практикуется при технических экспериментах и испытаниях в производственных условиях.

Делается это следующим образом. Пусть производится испытание станка, и для некоторой величины y нужно получить формулу зависимости от другой величины x в виде степенной функции $y = cx^{\alpha}$. Требуется найти c и α. Производятся испытания, получают таблицу значений y_1, y_2, ..., y_n, соответствующих значениям x_1, x_2, ..., x_n. На логарифмическую бумагу наносятся точки (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), конечно, в логарифмических координатах. Эти точки расположены так, что можно провести прямую, к которой близки эти точки (и расположены по разные стороны от нее). Такое расположение точек как раз и указывает на то, что графиком функции на логарифмической бумаге является прямая, а, следовательно, искомая функция есть степенная функция. Эта прямая и есть график искомой функции. Вычерчиваем на самом деле прямую и путем непосредственного измерения находим параметры. Именно, показатель α есть угловой коэффициент прямой, а коэффициент c есть отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат (в логарифмических координатах). Для отыскания c нужно найти точку пересечения прямой с осью ординат и прочесть соответствующую пометку на шкале.

Если мы хотим получить формулу в виде показательной функции $y = ce^{kx}$, то пользуемся полулогарифмической бумагой. Наносим экспериментальные точки на бумагу и вычерчиваем прямую, к которой эти точки близки. Это и будет график искомой функции. Пользуясь графиком, находим c и k.

Пример 1. Для характеристики вольфрамовой лампы произведены измерения силы тока и напряжения. Результаты измерений даны в таблице.

V	2	4	8	16	25	32	50	64
I	2,45	3,70	5,70	8,55	11,25	12,95	17,15	20,00

Нанеся соответствующие точки на логарифмическую бумагу, видим, что точки эти располагаются вблизи некоторой прямой (рис. 21, III). Отсюда делаем заключение, что связь между V и I выражается степенной функцией $I = cV^{\alpha}$.

Проводим на логарифмической бумаге прямую, близкую к нанесенным на ней точкам. Находим (по отметкам на бумаге) ординату точки пересечения прямой с осью OY, это будет $c = 0{,}0165$. Измеряем тангенс угла между прямой и осью OX. Это будет 0,598. Итак,

$$I = 0{,}0165 \cdot V^{0{,}598}.$$

Пример 2. Нагретое тело свободно охлаждается. Производятся измерения разности U температур тела и окружающей среды в различные моменты времени t. Результаты измерений даются таблицей.

$t_ч$	0	0,1	0,2	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9	1,0
U	100°	89°	78,5°	62°	55°	43°	38°	34°	30°

Нанеся соответствующие точки на полулогарифмическую бумагу, увидим, что точки эти располагаются вблизи некоторой прямой (рис. 22, III). Отсюда делаем заключение, что связь между t и U выражается показательной функцией:

$$U = c\,e^{-kt}.$$

Проводим на полулогарифмической бумаге прямую, близкую к нанесенным на ней точкам. Находим (по отметкам на бумаге) ординату точки пересечения прямой с осью OY, это будет $c = 100$. Измеряем тангенс угла между прямой и осью OX, это будет 0,500. Итак,

$$k = \frac{0,500}{\lg e} = 1,152; \quad U = 100 \cdot e^{-1,152t}.$$

§ 50. Лабораторная работа № 5

Тема. *Составление эмпирических формул способом наименьших квадратов* (8 час).

Задание 1. Дана таблица значений функции $f(x)$. Найти приближенное выражение функции в виде многочлена данной степени (первой степени, второй степени) по способу наименьших квадратов.

Порядок выполнения задания. 1) Составить точечный график функции по данным таблицы. По расположению точек убедиться в том, что многочлен данной степени является подходящей функцией для приближенного выражения функции $f(x)$.

2) Произведя необходимые вычисления, составить систему (6.9) или (6.12), решить ее и тем самым найти искомый приближающий многочлен $f(x)$.

3) Найти значения многочлена $\varphi(x)$ в данных точках и сравнить их с данными таблицы.

4) Построить график многочлена $\varphi(x)$ и убедиться в том, что нанесенные точки близки к графику.

Задание 2. Дана таблица значений функции $f(x)$. Найти приближенное выражение функции $f(x)$ в виде степенной или показательной функции по способу наименьших квадратов.

Порядок выполнения задания. 1) Составить точечный график функции по данным таблицы. По расположению точек убедиться в том, что степенная или показательная функция является подходящей для приближенного выражения функции $f(x)$.

2) Записать искомую функцию в виде $\varphi(x) = cx^{\alpha}$ или $\varphi(x) = ce^{kx}$. Прологарифмировать, произвести замену переменных и привести задачу к задаче о приближении функции посредством линейной функции $\varphi_1(\xi) = A\xi + B$.

3) Произвести необходимые вычисления, составить систему (6.9). Решить систему и найти A и B.

4) Найти параметры c и α (или c и k) и записать в окончательном виде искомую функцию.

5) Построить график найденной функции и убедиться в том, что нанесенные точки близки к графику.

Задание 3. Дана таблица значений функции $f(x)$. Найти приближенное выражение функции $\varphi(x)$ в виде степенной или показательной функции при помощи логарифмической или полулогарифмической сетки.

Порядок выполнения задания.

1) Взять лист логарифмической (если приближающая функция степенная) или полулогарифмической (если приближающая функция показательная) бумаги. Построить точечный график функции по данным таблицы. Убедиться в том, что точки графика близки к некоторой прямой.

2) Начертить на том же листе бумаги прямую, близкую к построенным точкам. Эта прямая и есть график искомой функции.

3) Найти, пользуясь чертежами, оба параметра (c и α в случае степенной функции, c и k в случае показательной функции).

4) Записать в окончательном виде искомую функцию.

5) Пользуясь чертежом, найти приближенные значения функции в двух-трех промежуточных точках.

ГЛАВА 8

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 51. Формулы механических квадратур

Вычисление определенного интеграла — действие, которое применяется очень часто в практических задачах. Очень многие задачи физики, техники, экономики приводятся к определенным интегралам. Простым способом вычисления определенного интеграла является применение известной формулы Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функция. Однако формула Ньютона — Лейбница может быть применена лишь в том случае, когда мы можем найти неопределенный интеграл функции $f(x)$. Как известно, неопределенный интеграл от любой непрерывной функции существует, но лишь для некоторых классов функций он может быть выражен в конечном виде через известные нам элементарные функции. Если же неопределенный интеграл не выражается в конечном виде через элементарные функции (как говорят, «не берется в конечном виде»), то мы не имеем практической возможности применить формулу Ньютона — Лейбница. Укажем ряд примеров интегралов, которые «не берутся в конечном виде»:

$$\int e^{-x^2}\,dx,\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\ \int \frac{dx}{\ln x}.$$

Все приведенные здесь интегралы имеют важное практическое значение.

Но если от какой-либо функции неопределенный интеграл берется в конечном виде, стало быть, для вычисления определенного интеграла можно применить формулу Ньютона — Лейбница, то нередко бывает, что выражение неопределенного интеграла очень сложно и поэтому практическое применение формулы Ньютона — Лейбница оказывается затруднительным.

Нередко приходится вычислять определенный интеграл от функции, заданной не формулой, а таблицей или графиком.

Все эти обстоятельства приводят к необходимости разработки приближенных методов вычисления определенных интегралов. Студенту известны из курса математического анализа некоторые формулы приближенного вычисления определенного интеграла (формула прямоугольников, формула трапеций, формула Симпсона). Существует много других формул. Формулы для приближенного вычисления определенных интегралов применяются в вычислительной практике очень часто. Формулы для приближенного вычисления интегралов называют также формулами механических квадратур. Следует отметить, что так называемое «приближенное» вычисление интегралов практически обычно бывает не хуже «точного». Ведь на практике важен численный результат интегрирования. Если мы вычислим, например, интеграл $\int\limits_0^b \sqrt{a^2+x^2}\,dx$ по «точной» формуле, то получим:

$$\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right).$$

Но для дальнейшего применения этого результата на практике нужно подставить численные значения a и b. Если даже a и b заданы точно, то $\sqrt{a^2+b^2}$, $\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)$ мы можем вычислить обычно только приближенно. Таким образом, окончательный численный результат будет приближенным. К тому же числовые данные a и b на практике являются приближенными числами (например, результаты измерений). Поэтому не следует противопоставлять термины «точное интегрирование» и «приближенное интегрирование».

§ 52. Формула трапеций

Пусть дана функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Разделим отрезок на n равных частей. Длина каждого частичного отрезка $h=\frac{b-a}{n}$. Точки деления (концы частичных отрезков) обозначим $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(x_0=a, x_n=b)$. Стало быть, $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h, \ldots$ $\ldots, x_k=a+kh, \ldots, x_n=a+nh$. Значения функции $f(x)$ в точках деления обозначим соответственно $y_0, y_1, \ldots$ $\ldots, y_n$ $(y_k=f(x_k))$. В каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ заменим функцию $f(x)$ линейной функцией, принимающей на концах частичного отрезка те же значения, что и данная функция, именно y_{k-1}, y_k (т. е. мы осуществим на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ линейное интерполирование). Эта линейная функция запишется так:

$$y=y_{k-1}+\frac{y_k-y_{k-1}}{h}(x-x_{k-1}). \qquad (8.\,1)$$

В результате мы вместо данной функции $f(x)$ получим новую функцию, график которой есть ломаная, вписанная в график данной функции (рис. 23). Эту новую функцию обозначим $g(x)$. Мы заменим интеграл от данной функции интегралом от этой новой функции $g(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (8.\,2)$$

Но

$$\int_a^b g(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx+\ldots+\int_{n-1}^{x_n} g(x)\,dx. \qquad (8.\,3)$$

Вычислим каждый интеграл и выполним преобразования:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\,dx=\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[y_{k+1}+\frac{y_k-y_{k-1}}{h}(x-x_{k-1})\right]dx=$$

$$=\frac{y_{k-1}+y_k}{2}. \qquad (8.\,4)$$

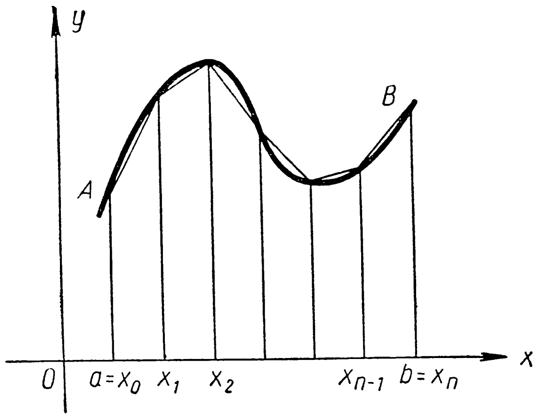

Рис. 23

Поэтому, заменяя каждый член правой части формулы (8.3) выражением (8.4), получим:

$$\int_a^b g(x)\,dx \approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right].$$

Учитывая (8.2) и выполняя преобразование, находим:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right]. \quad (8.5)$$

Это и есть формула трапеций.

В случае, когда $f(x) \geqslant 0$, формула (8.4) имеет простое геометрическое толкование: $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции с высотой h и с основаниями y_{k-1} и y_k. Формула же (8.5) означает, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 23) приближенно заменяем площадью фигуры, составленной из прямолинейных трапеций с высотами h и с основаниями y_0 и y_1, y_1 и $y_2, \ldots, y_{n-1}$ и y_n. (Заметим, что если условие $y \geqslant 0$ не выполняется, то такое геометрическое истолкование теряет силу. Стало быть, чисто геометрический вывод формулы не является убедительным для любой функции.)

§ 53. Остаточный член формулы трапеций

Для оценки погрешности формулы трапеций рассмотрим остаточный член этой формулы. Остаточный член $R_n(x)$ определяется так:

$$R_n(x) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx. \tag{8.6}$$

Мы дадим оценку остаточного члена, предполагая, что функция $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ имеет непрерывную производную второго порядка.

Рассмотрим функции $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[x_{k-1},\ x_k]$. Функция $g(x)$ является интерполяционным многочленом первой степени для функции $f(x)$. Поэтому применим формулу остаточного члена интерполяционной формулы (4.20):

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x - x_{k-1})(x - x_k) \qquad (x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k). \tag{8.7}$$

Проинтегрируем это равенство на отрезке $[x_{k-1};\ x_k]$:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{k-1}^{x_k} f''(\xi_k)(x - x_{k-1})(x - x_k)\,dx$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.8}$$

Обозначим

$$r_k = \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(\xi_k)(x - x_{k-1})(x - x_k)\,dx,$$

оценим эту величину. Так как $f''(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она ограничена на этом отрезке. Значит, существует число $M > 0$, такое, что $|f''(x)| \leqslant M$ для всех x отрезка $[a; b]$.

Поэтому

$$|r_k| \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} M \cdot |(x - x_{k-1})(x - x_k)\, dx| =$$

$$= \frac{1}{2} M \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x_k - x)\, dx.$$

Последний интеграл легко вычислить. Заметим, что $x_k - x_{k-1} = h$. Сделаем подстановку $x = x_{k-1} = t$, $dx = dt$. Будем иметь:

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x_k - x)\, dx = \int\limits_0^h t(h - t)\, dt = \frac{h^3}{6}.$$

Поэтому

$$|r_k| \leqslant \frac{M h^3}{12}. \qquad (8.\ 9)$$

Возвращаясь к формуле (8.8), запишем ее так:

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\, dx + r_k.$$

Полагая здесь $k = 1, 2, \ldots, n$ и складывая полученные равенства, получим:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b g(x)\, dx + (r_1 + r_2 + \ldots + r_n).$$

Очевидно, здесь

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = R_n(x).$$

Оценим $R_n(x)$ таким образом:

$$R_n|(x)| \leqslant |r_1| + |r_2| + \ldots + |r_n|.$$

Учитывая здесь (8.9), получим:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M h^3}{12} n.$$

Заменяя здесь $h = \frac{b-a}{n}$, приходим к такому неравенству:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M. \qquad (8.10)$$

Формула (8.10) и дает оценку остаточного члена формулы трапеций.

Замечание. Можно было бы вывести точную формулу остаточного члена, она такова:

$$R(x) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \qquad (8.11)$$

где ξ — некоторая точка внутри отрезка $[a; b]$. Однако практически мы не можем пользоваться формулой (8.11), так как ξ нам неизвестно. Для оценки погрешности приближенного интегрирования все равно приходится пользоваться неравенством (8.10).

§ 54. Формула Симпсона

Пусть дана функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$. Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. Разделим отрезок $[a; b]$ на четное число $2n$ равных частей. Длина частичного отрезка будет $h = \frac{b-a}{2n}$. Точки деления (концы частичных отрезков) обозначим $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ $(x_0 = a, x_{2n} = b)$. Значения функции в точках деления обозначим соответственно $y_0, y_1, \ldots y_n$.

Рассмотрим отрезок $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, составленный из двух частичных отрезков $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$ и $[x_{2k-1}, x_{2k}]$. На отрезке $[x_{2k-2}; x_{2k}]$ заменим функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом с узлами $x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}$. Это будет многочлен второй степени. (Геометрически это означает, что мы проводим параболу с осью, параллельной оси OY, через три точки $(x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k})$ (рис. 24).) Уравнение параболы: $y = Ax^2 + Bx + C$. Заменив в каждом отрезке $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ данную функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом, мы получим на всем отрезке $[a; b]$ новую функцию, обозначим ее $g(x)$. Она будет являться приближенным выражением данной функции. Интеграл от функции $g(x)$ и будет служить приближенным значением искомого интеграла.

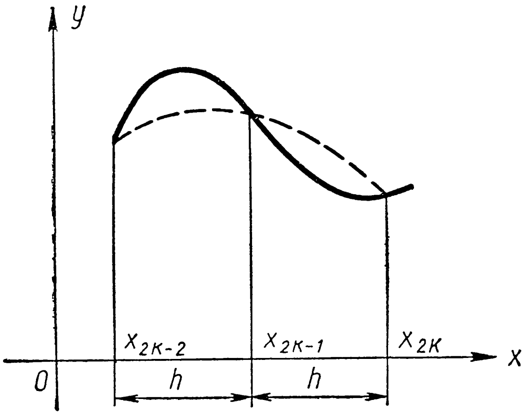

Рис. 24

Вычислим этот интеграл:

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_2} g(x)\,dx + \int\limits_{x_2}^{x_4} g(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} g(x)\,dx +$$

$$+ \ldots + \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} g(x)\,dx. \qquad (8.\ 12)$$

Проведем вычисление любого члена правой части, т. е вычисление интеграла $\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} g(x)dx$. Так как $g(x)$ есть многочлен второй степени, который можно написать в виде $y = Ax^2 + Bx + C$, то мы можем непосредственно вычислить интеграл. После некоторых элементарных преобразований получаем:

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} g(x)\,dx = \frac{h}{3}\,[y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}], \qquad (8.\ 13)$$

Мы не останавливаемся подробно на проведении этих преобразований, так как все это было доказано в курсе математического анализа. Заменяя в (8.12) каждый член правой части выражениями вида (8.13) и учитывая, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \int\limits_a^b g(x)\,dx$, получим:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\ldots y_{2n-1})+\right.$$
$$\left.+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\right]. \qquad (8.\ 14)$$

Это и есть формула Симпсона.

Остаточный член формулы Симпсона выражается формулой:

$$R_n(x) = -\frac{(b-a)^5}{180\,(2n)^4} f^{(IV)}(\xi). \qquad (8.\ 15)$$

Стало быть, оценка погрешности формулы Симпсона определяется неравенством

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M\,(b-a)^5}{180\,(2n)^4},$$

где M — наибольшее значение $|f^{(IV)}(x)|$ на отрезке $[a;\ b]$.

Замечание. Из формулы (8.15) видно, что формула Симпсона будет точной, если $f(x)$ есть многочлен второй или третьей степени, так как в этом случае $f(x) \equiv 0$ и, следовательно, $R_n(x) = 0$.

§ 55. Замечания об оценке точности формул механических квадратур

Рассматривая формулы остаточного члена формул трапеций и Симпсона, мы видим, что, чем больше n, тем меньше погрешность, тем точнее результат приближенного интегрирования. Сравнение формул (8.11) и (8.15) показывает, что погрешность формулы Симпсона существенно меньше погрешности формулы трапеций. При возрастании n погрешность формулы трапеций уменьшается как $\frac{1}{n^2}$, а погрешность формулы Симпсона — как $\frac{1}{n^4}$. В то же время вычислительная работа при использовании формулы Симпсона лишь немного сложнее, чем при использовании формулы трапеций. Поэтому формула Симпсона лучше для практического применения.

Для оценки погрешности формул механических квадратур мы имеем, прежде всего, формулы остаточного члена. Однако эти формулы могут быть практически применены лишь в том случае, когда функция $f(x)$ задана аналитически и мы можем найти ее производные соответствующего порядка (в случае формулы трапеций — второго порядка, в случае формул Симпсона — четвертого). Если же функция $f(x)$ не задана аналитически, то мы не можем воспользоваться полученными оценками погрешности. Для оценки точности той или иной формулы механических квадратур пользуются другими приемами. Впрочем, даже если функция задана аналитически и мы можем найти производную соответствующего порядка, то применение формулы остаточного члена бывает часто затруднительно ввиду большой трудности оценки производной. Поэтому и в случае аналитического задания функции нередко применяют другие приемы.

Один из употребительных приемов следующий. Вычисляется интеграл по формуле трапеций или Симпсона при делении отрезка на $2n$ частей и n частей. (В случае формулы Симпсона n должно быть четным.) Совпадение первых знаков у двух полученных результатов дает основание судить о точности найденных значений. В случае формулы Симпсона можно приближенно считать, что погрешность не превзойдет числа

$$\frac{|I_1 - I_2|}{15}, \tag{8. 16}$$

где I_1 и I_2 — результаты вычисления интеграла в случае $2n$ частей и n частей.

Отметим еще один прием, позволяющий судить о применимости формулы Симпсона. Составляем таблицу значений функции $f(x)$ с шагом h, используемым в этой формуле, и таблицу разностей. Если вторые или третьи разности постоянны или почти постоянны, то это служит признаком хорошей точности формулы Симпсона для данной функции. В самом деле, постоянство разностей второго или третьего порядка означает, что функция достаточно близка к многочлену второй или третьей степени, а для таких многочленов формула Симпсона дает точное значение.

Следует указать также на соображения, вытекающие из рассмотрения графика функции. Построим график функции, нанесем точки деления, ординаты и определяемые ими точки кривой. Если избранные точки расположены так, что они характеризуют собой ход функции и проведенная через них плавная кривая необходимо будет близка к данной, то от применения приближенной формулы можно ожидать удовлетворительного результата (рис. 25). Если же

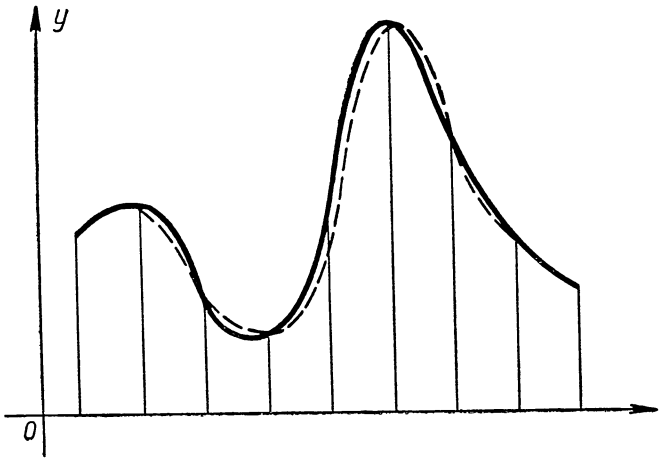

Рис. 25

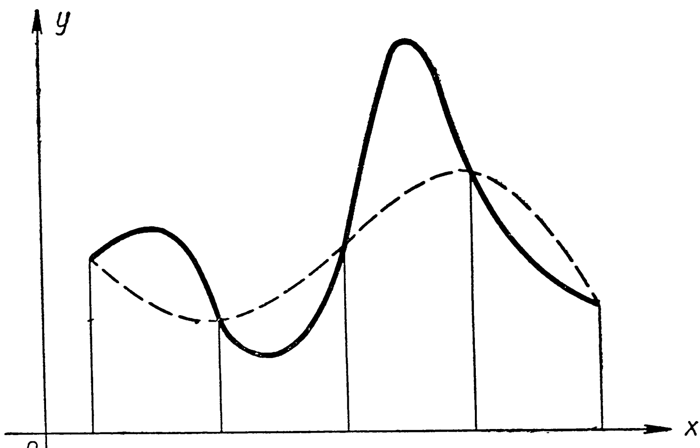

Рис. 26

избранные ординаты придутся на такие места кривой, что этими точками кривая не характеризуется (например, обойдены точки максимумов и минимумов или случайно точки пришлись или только вблизи нулей, или только вблизи максимумов и т. д.), то результат применения формулы не может быть удовлетворительным (см. рис. 26). Тогда нужно взять другое число ординат (большее), подбирая это число так, чтобы попасть на характерные точки (сравните рис. 25 и 26). Приведенные соображения могут быть применены как в случае функции, заданной аналитически, так и в случае табличного или графического задания функции.

§ 56. Примеры и упражнения

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_1^{1,8} \frac{dx}{x+1}$, применяя формулу трапеций.

Примем $n = 8$, значит, $h = 0,1$. Составим расчетную таблицу.

Таблица 15

k	x_k	$x_k + 1$	$y_k = \frac{1}{x_k+1}$
(1)	(2)	(3)	(4)
0	1	2	0,5000
1	1,1	2,1	0,4762
2	1,2	2,2	0,4545
3	1,3	2,3	0,4348
4	1,4	2,4	0,4167
5	1,5	2,5	0,4000
6	1,6	2,6	0,3846
7	1,7	2,7	0,3704
8	1,8	2,8	0,3574
$\frac{b-a}{n} = 0,1$			$\frac{y_0+y_8}{2} = 0,8571$ $\sum\limits_1^7 y_k = 5,8744$
$\int\limits_1^{1,8} \frac{dx}{x+1} \approx 0,3366$			

Оценим погрешность по формуле (8. 10). Найдем $f''(x)$, где

$$f(x)=\frac{1}{x+1},\quad f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}.$$

Оценим $|f''(x)|$. Так как $f''(x)$ убывает на отрезке [1; 1,8], то $\max|f''(x)|=f''(1)=\frac{1}{4}$. Значит, на основании формулы (8. 10) $|R_8(x)|\leqslant\frac{0{,}8^3}{12\cdot 64}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}\cdot 10^{-3}$. Как видим, полученное значение верно по крайней мере до третьего десятичного знака.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,72}\frac{e^x}{x+1}\,dx$, применяя формулу Симпсона. Оценить погрешность по правилу удвоения.

Примем $2n=6$, $4n=12$. Составим расчетную таблицу для вычисления интеграла при $k=12$ ординатах.

Таблица 16

				$y=(4):(3)$		
k	x_k	x_k+1	e^{x_k}	y_0, y_{12}	y_2, y_4 y_6, y_8, y_{10}	y_1, y_3, y_5, y_7, y_9, y_{11}
1	2	3	4	5	6	7
0	0,00	1,00	1,00000	1,00000		
1	0,06	1,06	1,06184			1,001736
2	0,12	1,12	1,12750		1,006896	
3	0,18	1,18	1,19722			1,014593
4	0,24	1,24	1,27125		1,025202	
5	0,30	1,30	1,34989			1,038354
6	0,36	1,36	1,43333		1,053919	
7	0,42	1,42	1,52196			1,071803
8	0,48	1,48	1,61607		1,091939	
9	0,54	1,54	1,71601			1,114292
10	0,60	1,60	1,82212		1,138825	
11	0,66	1,66	1,93479			1,165536
12	0,72	1,72	2,05443	1,194436		
$\frac{b-a}{6n}=0{,}02$				2,194436	5,316781 10,633562	6,406314 25,625256

$I_2=0{,}02\cdot 38{,}453256=0{,}76907$

Используя те же значения функции, которые записаны в таблице 6, вычислим интеграл по формуле Симпсона для шести ординат.

Расчетную таблицу составим в таком виде.

Таблица 17

k	y_0, y_{12}	y_4, y_8	y_2, y_6, y_{10}
0	1,000000		
2			1,006896
4		1,025202	
6			1,053919
8		1,091939	
10			1,138825
12	1,194436		
	2,194436	2,117141 4,234282	3,199640 12,798560

$$\frac{b-a}{6n} = 0,04$$

$$I_1 = 0,04 \cdot 19,227278 = 0,76909$$

Оценим погрешность по формуле (8.16). Погрешность оказывается меньше чем $0,2 \cdot 10^{-5}$. Стало быть, полученное значение верно до пятого десятичного знака.

§ 57. Кубатурная формула трапеций

В практике вычислений нередко бывает необходимо вычисление двойного интеграла (например, при вычислении объемов тел неправильной формы). Важно иметь приближенные методы вычисления двойных интегралов. Мы получим сейчас одну из формул приближенного вычисления двойного интеграла.

Прежде всего отметим формулу для вычисления объема усеченной призмы. Рассмотрим прямую усеченную призму $ABCDEF$, основание которой есть прямоугольный треугольник ABC с длинами катетов a и b. Длины ребер призмы обозначим z_1, z_2, z_3. Нетрудно доказать (докажите самостоятельно), что объем такой усеченной призмы равен (рис. 27):

$$V = \frac{ab}{6}(z_1 + z_2 + z_3). \tag{8.17}$$

Пусть теперь требуется вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$. Область D будем предполагать прямоугольной, а функцию $f(x, y)$ — положительной. Как известно из курса математического анализа, в случае, если $f(x,y) \geqslant 0$, двойной интеграл численно равен объему тела, основанием которого является область D, а сверху тело ограничено поверхностью $z = f(x,y)$ (рис. 28). Стало быть, приближенное вычисление интеграла равносильно в нашем случае приближенному вычислению объема тела.

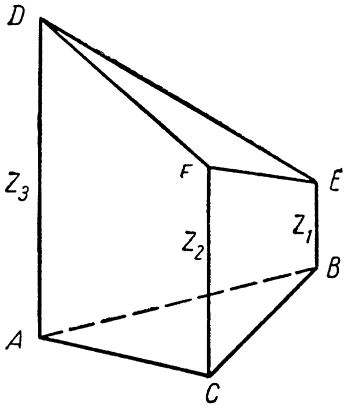

Рис. 27

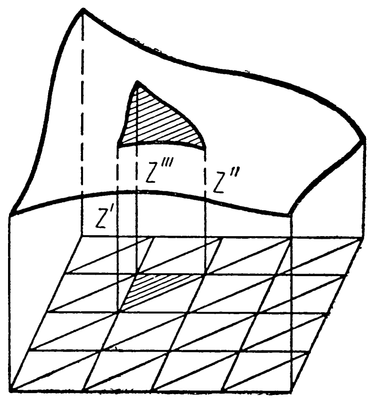

Рис. 28

Прямоугольник D, служащий основанием тела, разобьем на конгруэнтные прямоугольники со сторонами h и k, а каждый прямоугольник диагональю разделим на треугольники. Через прямые, разделяющие основание тела на прямоугольники, проведем плоскости, перпендикулярные основанию. Плоскости, перпендикулярные основанию, проведем также через диагонали частичных прямоугольников. Все данное тело окажется разбитым на элементарные тела, которые мы назовем элементарными криволинейными призмами (рис. 28). Каждая из таких криволинейных призм ограничена с боков и снизу плоскостями, а сверху — частью данной поверхности $z = f(x, y)$.

Обозначим вершины частичных прямоугольников, на которые разделена область D, двойными индексами i, j. Соответствующие значения функции $z = f(x, y)$ обозначим

z_{ij}. Это будут аппликаты точек поверхности. Заменим все криволинейные призмы прямолинейными усеченными с теми же боковыми ребрами. Вычислив объем такой прямолинейной усеченной призмы, получим:

$$\Delta V = \frac{hk}{6}(z' + z'' + z'''), \qquad (8.\ 18)$$

где z', z'', z''' — длины боковых ребер.

За приближенное значение объема (и, стало быть, за приближенное значение двойного интеграла) примем сумму объемов всех таких прямолинейных усеченных призм. Применяя формулу (8.18) к каждому из треугольников, на которые мы разбили область D, и суммируя результаты, мы получим приближенную формулу двойного интеграла. При суммировании учтем, что некоторые аппликаты будут повторяться два, три, шесть раз, так как соответствующая точка является вершиной нескольких треугольников.

В результате мы получим формулу:

$$V = \frac{hk}{6}\left[\sum\nolimits_1 z_{ij} + 2\sum\nolimits_2 z_{ij} + 3\sum\nolimits_3 z_{ij} + 6\sum\nolimits_4 z_{ij}\right], \qquad (8.\ 19)$$

где $\sum_1$ — сумма, относящаяся к тем двум вершинам прямоугольника D, которые не являются вершинами проведенных диагоналей;

$\sum_2$ — сумма, относящаяся к тем двум вершинам прямоугольника D, которые являются вершинами диагоналей;

$\sum_3$ — сумма, относящаяся к вершинам частичных прямоугольников, лежащих строго внутри сторон прямоугольника D;

$\sum_4$ — сумма, относящаяся к вершинам частичных прямоугольников, лежащих строго внутри прямоугольника D (см. рис. 29).

Формула (8.19) и есть кубатурная (объемная) формула трапеций.

Заметим, что формулу эту можно вывести для учащихся средней школы как приближенную формулу вычисления

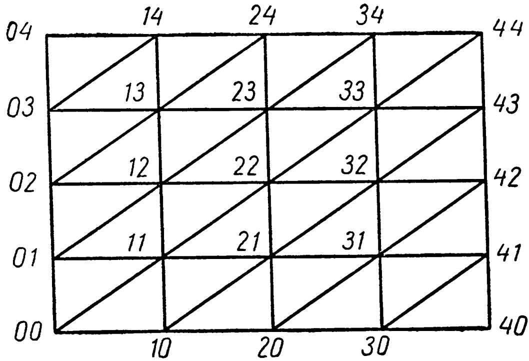

Рис. 29

объемов. Формулу (8.18) можно вывести на уроках, с формулой (8.19) познакомить на занятии математического кружка.

§ 58. Кубатурная формула Симпсона

Для приближенного вычисления двойного интеграла мы получим формулу более точную, чем объемная формула трапеций.

Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$ по прямоугольной области D со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 30). Длины сторон прямоугольника обозначим $2h$, $2k$. Разобьем прямоугольник на четыре конгруэнтных прямоугольника путем проведения прямых, параллельных осям координат и проходящих через центр прямоугольника D. Стороны каждого из этих прямоугольников будут h и k. Вершины малых прямоугольников мы обозначим двойными индексами. Они будут служить узлами в формуле приближенного вычисления интеграла. Значения функции $z = f(x,y)$ в узлах мы отметим соответствующими индексами: z_{00}, z_{10}, z_{20}, z_{01}, z_{11}, z_{21}, z_{02}, z_{12}, z_{22}. Двойной интеграл представим в виде повторного интеграла:

$$I = \int\limits_c^{c+2k} \left[\int\limits_c^{a+2h} f(x, y)\, dx\right] dy.$$

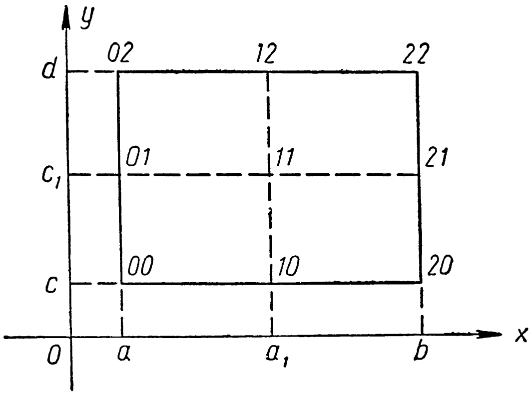

Рис. 30

Рассмотрим внутренний интеграл $F(y)=\int\limits_a^{a+2h} f(x; y)\,dx$.

Это будет функция переменной y, определенная на отрезке $c \leqslant y \leqslant c+2k$. Найдем ее значения $F_0 = F(c)$, $F_1=F(c+k)$, $F_2 = F(c+2k)$, применяя формулу Симпсона для однократного интеграла:

$$F_0 = F(c) = \int\limits_a^{a+h} f(x, c)\,dx \approx \frac{h}{3}[z_{00}+4z_{10}+z_{20}],$$

точно так же

$$F_1 = F(c+k) = \int\limits_a^{a+2h} f(x, c+k)\,dx \approx \frac{h}{3}[z_{01}+4z_{11}+z_{21}],$$

$$F_2=F(c+2k) = \int\limits_a^{a+2h} f(x, c+2k)\,dx \approx \frac{h}{3}[z_{02}+4z_{12}+z_{22}].$$

Теперь вычислим данный интеграл: $I = \int\limits_c^{c+2k} F(y)\,dy$.

Мы опять имеем однократный интеграл, применим к нему формулу Симпсона $I = \frac{k}{3}[F_0+4F_1+F_2]$.

Подставляя сюда найденные значения F_0, F_1, F_2, получим окончательную формулу:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{hk}{9}[z_{00}+z_{02}+z_{20}+z_{22}+$$

$$4(z_{01}+z_{10}+z_{21}+z_{12})+16z_{11}]. \qquad (8.20)$$

Заметим, что значения функции z в квадратных скобках даются здесь с такими коэффициентами: значения функции в вершинах прямоугольника D с коэффициентом 1, значения функции в центре прямоугольника с коэффициентом 16, значения функции в серединах сторон прямоугольника D с коэффициентом 4.

Формула (8.20) называется элементарной *кубатурной формулой Симпсона*.

Пусть теперь мы желаем получить более точное значение интеграла и для этой цели разбиваем прямоугольник

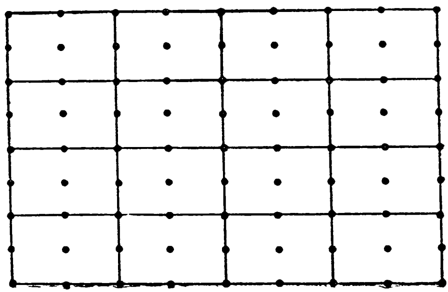

Рис. 31

на любое (достаточно большое) число m конгруэнтных прямоугольников со сторонами $2h$ и $2k$. К каждому из них мы намерены применить формулу (8.20). Поэтому в каждом из этих m прямоугольников мы отметим такие точки: вершины прямоугольника, середины сторон, центр. Применим к каждому прямоугольнику формулу (8.20) и найдем сумму результатов вычислений для всех прямоугольников. Для того чтобы полученный результат записать в удобной форме, отметим следующие категории узлов (рис. 31): 1) вершины основного прямоугольника; 2) вершины частичных прямоугольников, лежащих внутри сторон основного прямоугольника; 3) вершины частичных прямоугольников, лежащих внутри основного прямоугольника; 4) середины сторон частичных прямоугольников, лежащие на сторонах основного; 5) середины сторон частичных прямоугольников, лежащие внутри основного прямоугольника; 6) центры частичных прямоугольников.

Будем понимать под $\sum_k$ знак суммы слагаемых, относящихся к узлам k-й категории ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Будем обозначать узлы двумя индексами ij, а через z_{ij} обозначим значения функции $f(x,y)$ в соответствующей узловой точке. Тогда формула приближенного вычисления интеграла может быть записана так:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \frac{hk}{9}\Big[\sum\nolimits_1 z_{ij} + 2\sum\nolimits_2 z_{ij} + 4\sum\nolimits_3 z_{ij} + 4\sum\nolimits_4 z_{ij} + 8\sum\nolimits_5 z_{ij} + 16\sum\nolimits_6 z_{ij}\Big]. \qquad (8.21)$$

Происхождение коэффициентов перед суммами $\sum_k$ таково. Рассмотрим, например, узлы второй категории. Каждый такой узел является вершиной двух частичных прямоугольников. В формуле (8.20) соответствующее значение z_{ij} входит с коэффициентом 1, но мы складываем результаты, относящиеся к двум прямоугольникам, поэтому в окончательном итоге оказывается коэффициент 2. (Рекомендуется дать объяснение о происхождении всех коэффициентов формулы (8.21).)

Формула (8.21) и есть кубатурная (объемная) формула Симпсона.

§ 59. Примеры и упражнения

Пример 1. Вычислить объем тела, вырезаемого из призмы с квадратным перпендикулярным сечением поверхностью шара, центр которого лежит на оси призмы. Сторона квадратного сечения 60 *см*, радиус шара 50 *см*.

Примем ось призмы за ось OZ, центр шаровой поверхности — за начало координат (рис. 32). Уравнение шаровой поверхности будет: $x^2 + y^2 + z^2 = 2500$.

1/8 часть искомого объема есть объем тела K, основанием которого является квадрат $OACB$, обозначим его D, лежащий в плоскости XOY, ограниченного сверху частью поверхности сферы $O_1A_1B_1C_1$, а с боков — плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x = 30$, $y = 30$. Объем тела выражается двойным интегралом

$$I = \iint\limits_D \sqrt{2500 - x^2 - y^2}\,dxdy.$$

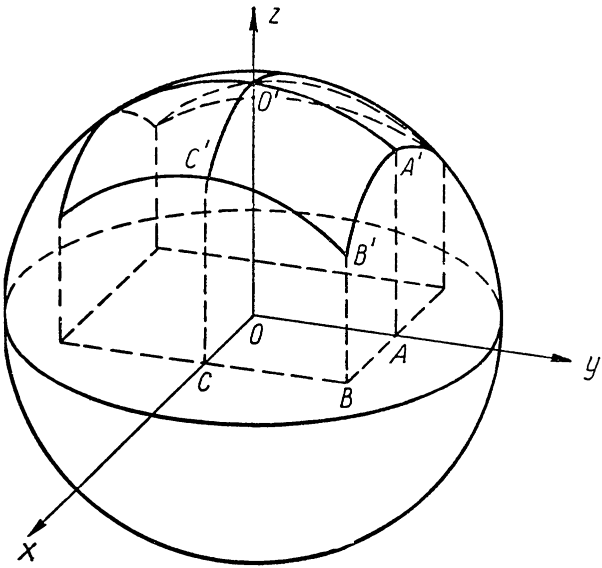

Рис. 32

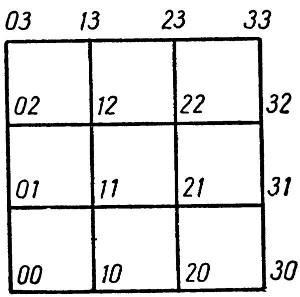

Рис. 33

Объем данного тела $V=8I$. Вычислим интеграл, применяя кубатурную формулу трапеций. Область D разобьем на девять конгруэнтных квадратов, со стороной 10 *см* каждый. Узлы обозначим, как обычно, двумя индексами (рис. 33). Вычислим значения функции

$$z=\sqrt{2500-x^2-y^2}.$$

Координаты узловых точек можно записать в виде таблицы (координаты узла обозначим x_i, y_i).

3	0; 30	10; 30	20; 30	30; 30
2	0; 20	10; 20	20; 20	30; 20
1	0; 10	10; 10	20; 10	30; 10
0	0; 0	10; 0	20; 0	30; 0
j / i	0	1	2	3

Производя вычисления, получим следующие значения функции в узловых точках.

Таблица 19

$j \diagdown i$	0	1	2	3
3	40,0000 1	38,7298 3	34,6410 3	26,4575 2
2	45,8258 2	44,7214 4	41,2311 4	38,6410 3
1	48,9898 3	47,9583 4	44,7214 4	38,7298 3
0	50,0000 2	48,9898 3	45,8258 3	40,0000 1

Пользуясь значениями функции, помещенными в таблице, мы вычислим двойной интеграл по кубатурной формуле трапеций. Для удобства вычислений в каждой клетке таблицы указывается номер категории соответствующей вершины. Получаем:

$$\sum\nolimits_1 z_{ij} = 80,0000, \qquad \sum\nolimits_2 z_{ij} = 76,4575,$$

$$\sum\nolimits_3 z_{ij} = 248,98 + 245,8258 + 238,7298 + 234,6410 = 336,3532,$$

$$\sum\nolimits_4 z_{ij} = 244,7214 + 47,9583 + 41,2311 = 178,6322.$$

Подставим результаты в (8.19), так как $h = k = 10$, получаем:

$$I = \frac{100}{6}\, 80,0000 + 152,9150 + 1009,0596 + 714,5288 = 32608,390.$$

Значит, $V = 8I \approx 260\,867$ *см*^{3}.

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint \frac{dx\,dy}{2+x^2+y^2}$, где D — прямоугольная область $0 \leqslant x \leqslant 2,4$, $0 \leqslant y \leqslant 0,8$. Применяя кубатурную формулу Симпсона, разделим основание прямоугольника на 4 части, высоту — на 2. Значит, $h = 0,6$; $k = 0,4$. Находим координаты узловых точек.

$j \diagdown i$	0	1	2	3	4
2	0; 0,8	0,6; 0,8	1,2; 0,8	1,8; 0,8	2,4; 0,8
1	0; 0,4	0,6; 0,4	1,2; 0,4	1,8; 0,4	2,4; 0,4
0	0; 0	0,6; 0	1,2; 0	1,8; 0	2,4; 0

Вычислим значения функции в узловых точках.

2	0,6098	0,5000	0,3247	0,2049	0,1351
1	0,8621	0,6579	0,3846	0,2273	0,1445
0	1,0000	0,7353	0,4098	0,2358	0,1479
$j \diagup i$	0	1	2	3	4

Применяя кубатурную формулу Симпсона, находим:

$$\sum\nolimits_1 = 1,8928,$$

$$\sum\nolimits_2 = 0,7345,$$

$$\sum\nolimits_3 = 0,$$

$$\sum\nolimits_4 = 2,6826,$$

$$\sum\nolimits_5 = 0,3846,$$

$$\sum\nolimits_6 = 0,8852.$$

Подставляя полученные значения в формулу (8.21), получим:

$$\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} \approx 0,8326.$$

§ 60. Кубатурные формулы Л. А. Люстерника и Н. Я. Виленкина

Существуют формулы приближенного вычисления двойных интегралов, в которых точки, где следует вычислять значения функции, задаются заранее специальным образом. Подбор этих точек производится так, чтобы полученная формула была точной для многочлена достаточно высокой степени при минимальном количестве этих точек.

Приведем без доказательства две формулы такого рода.

Кубатурная формула Л. А. Люстерника для круга. Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, где область интегрирования D — круг радиуса R с центром в начале координат. Имеет место следующая формула:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \pi R^2 \left[\frac{1}{4} f(0, 0) + \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{5} f_1\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}, k\frac{\pi}{3}\right)\right], \tag{8.22}$$

где $f_1(\rho, \varphi)$ означает запись функции через полярные координаты. Таким образом, для приближенного вычисления двойного интеграла по кругу следует вычислить значения функции в семи точках. Одна из этих точек — центр круга. Остальные — вершины правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{\frac{2}{3}}\,R$. Расположение всех этих точек показано на рисунке 34.

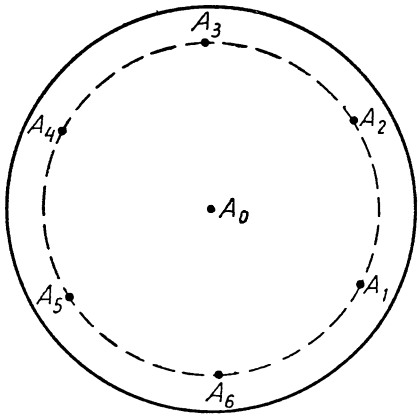

Рис. 34

Кубатурная формула Люстерника для шестиугольника.

Если область D есть правильный шестиугольник, вписанный в круг радиуса R, то имеет место следующая приближенная формула:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 \left[\frac{43}{56} f(0, 0) + \right.$$

$$\left. + \frac{125}{336} \sum_{k=0}^{5} f_1\left(\frac{\sqrt{14}}{15} R, k\frac{\pi}{3}\right)\right]. \tag{8.23}$$

Кубатурная формула Н. Я. Виленкина. Если область D есть прямоугольник с центром в начале координат, стороны которого параллельны осям координат (уравнения сторон $x = h$, $y = k$), то имеет место следующая приближенная формула:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = hk\left\{\frac{8}{7} + \frac{20}{63}\left[f\left(h\sqrt{\frac{14}{15}}, 0\right) + \right.\right.$$

$$\left. + f\left(-h\sqrt{\frac{14}{15}}, 0\right)\right] + \frac{5}{9}\left[f\left(h\sqrt{\frac{1}{3}}, k\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \right.$$

$$+ f\left(-h\sqrt{\frac{1}{3}}, k\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(-h\sqrt{\frac{1}{3}}, -k\sqrt{\frac{3}{5}}\right) +$$

$$\left.\left. + f\left(h\sqrt{\frac{1}{3}}, -k\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]\right\}. \qquad (8.24)$$

С приближенными формулами Л. А. Люстерника и Н. Я. Виленкина можно также познакомить учащихся в процессе кружковой работы.

§ 61. Лабораторная работа № 6

Тема. *Численное интегрирование по методу трапеций и по методу Симпсона* (6 час.)

Задание 1. Вычислить интеграл от данной функции по методу трапеций. Число частичных отрезков n задано. Оценить погрешность, пользуясь формулой остаточного члена.

Порядок выполнения работы. а) Найти $h = \frac{b-a}{n}$, составить расчетный бланк для вычисления интеграла по формуле трапеций (табл. 15).

б) Оценить погрешность, пользуясь оценкой остаточного члена (8.10).

в) Произвести вычисления и получить приближенное значение интеграла.

Задание 2. Вычислить интеграл от данной функции по методу Симпсона. Число частичных отрезков $2n$ задано. Оценить погрешность, пользуясь правилом удвоения.

Порядок выполнения работы. а) Найти $h_0 = \frac{b-a}{4n}$, составить расчетный бланк для вычисления интеграла по формуле Симпсона при $4\,n$ частичных отрезках.

б) Произвести вычисления и получить приближенное значение интеграла I_2.

в) Пользуясь значениями функции, вписанными в первый расчетный бланк, вычислить по формуле Симпсона приближенное значение интеграла I_1 при $2n$ частичных отрезках.

г) Оценить погрешность по формуле (8.16).

Задание 3. Вычислить, пользуясь кубатурной формулой трапеций или Симпсона, двойной интеграл от заданной функции по заданной прямоугольной области D. Размеры h и k заданы. Проиллюстрировать полученный результат геометрически.

Порядок выполнения работы. а) Записать координаты всех узлов, получающихся в результате подразделения прямоугольной области D на частичные прямоугольники.

б) Вычислить значения функции z_{ij} во всех узлах, записать, обозначая значение функции надлежащим образом, при помощи двойных индексов.

в) Применить кубатурную формулу трапеций или Симпсона и получить приближенное значение интеграла.

г) Проиллюстрировать геометрически полученный результат (изобразить на чертеже тело, объем которого выражается данным интегралом).

Замечание. В сложных случаях в задании будет указан чертеж, показывающий геометрический смысл данной задачи.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 3. **Решение системы линейных уравнений методом итераций**

Глава 4. **Интерполирование. Интерполяционный многочлен Лагранжа**

Глава 5. **Интерполяционные формулы Ньютона**

Глава 6. **Способ наименьших квадратов**

Глава 7. **Составление эмпирических формул**

Глава 8. **Численное интегрирование**

Степан Павлович Пулькин

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

Редакторы *В. Г. Долгополов* и *А. З. Рывкин*
Художник *Б. Д. Константинов*
Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *Т. А. Семейкина*
Корректор *Р. Б. Берман*

* * *

Сдано в набор 11/V 1966 г. Подписано к печати 13/X 1966 г. 84×108¹/₃₂. Печ. л. 5,375(9,03). Уч.-изд. л. 7,38. Тираж 15 тыс. экз. А17408.

* * *

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Заказ № 503.

Цена 21 коп.